

[ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՆԱԽԱՆՍԱՐԱՆ]

ՌԱՖԻԿ ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ

Օղջիմիզացիայի մեթոդներ

Ռ. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԻԶԱՅԻԱՅԻ
ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱԼԿ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2014

ՀՏԴ 519.8(07)
ԳՄԴ 22.18 ց7
Խ 282

Գրախոս՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ. Հակոբյան
Խմբագիր՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ս. Մահակյան

Խաչատրյան Ռ. Ա.

Խ 282 Օպտիմիզացիայի մեթոդներ: Ուսումնական ձեռնարկ/
Ռ. Խաչատրյան. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014, 134 էջ:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ուսանողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողներին:

ՀՏԴ 519.8(07)
ԳՄԴ 22.18 ց7

ISBN 978-5-8084-1921-6

© ԵՊՀ հրատ., 2014
© Խաչատրյան Ռ. Ա., 2014

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

1	Նիւնական գաղափարներ և թեորեմներ	8
1.1	Նախնական սահմանումներ	8
1.2	Էքսպրեսիվումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները . . .	16
2	Գրադիենտային մեթոդը	22
2.1	Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի գրադիենտային եղանակների ընդհանուր նկարագրությունը .	23
2.2	Քայլի կիսման եղանակի զուգամիությունան թեորեմը	27
2.3	Գծայնացման մեթոդը	34
2.4	Ապրիորի մեթոդի զուգամիությունը	39
2.5	Գրադիենտի պրոյեկցիայի մեթոդը	42
3	Ուռուցիկ անալիզ	48
3.1	Ուռուցիկ բազմությունների անջատման թեորեմները	49
3.2	Կարաթեոդորի թեորեմը	54
3.3	Նելլիի թեորեմը	58
3.4	Ուռուցիկ ֆունկցիայի սուբդիֆերենցիալը . .	63
3.5	Կուն-Տակկերի թեորեմը	72

4	Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը	81
4.1	Օպտիմալության առաջին և երկրորդ կարգի պայմանները	82
4.2	Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը (խառը սահմանափակումների դեպքը) . . .	98
5	Վարիացիոն հաշիվ	106
5.1	Էյլերի հավասարումը	107
5.2	Լագրանժի մեթոդը վարիացիոն հաշվի խնդիրներում	115
5.3	Վարիացիոն հաշվի դասական իզոպերիմետրիկ խնդիրը	124
5.4	Էքստրեմումի բավարար պայմանները վարիացիոն հաշվի խնդիրներում	127
	Գրականություն	132

Ն Ա Խ Ա Բ Ա Ն

Այս ուսումնական ձեռնարկը գրված է Երևանի պե-
րական համալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական
մաթեմատիկայի ֆակուլտետում հեղինակի կարդացած
դասախոսությունների հիման վրա: Ձեռնարկի նպատակն է
տալ օպտիմիզացիայի որոշ հիմնարար մեթոդների բավարար
չափով համակարգված և ժամանակակից շարադրանք:

Ձեռնարկը բաղկացած է հինգ գլուխներից:

Առաջին գլխում համառոտակի շարադրվում են էքս-
տրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու
բավարար պայմանները ոչ պայմանական օպտիմիզացիայի
խնդիրների համար վերջավոր չափանի տարածություններում:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է պայմանական և ոչ
պայմանական օպտիմիզացիայի մոտավոր մեթոդներին:
Նկարագրվում են գրադիենտային մեթոդները և նրանցում
քայլի ընտրության առավել հաճախ օգտագործվող կիսման,
ապրիորի և ամենաարագ վայրէջքի եղանակները:

Երրորդ գլխում ապացուցվում է Կուն-Տակկերի թեորեմը
որպես մինիմումի անհրաժեշտ ու բավարար պայման
ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիրների համար: Այս գլխում
տրվում են նաև որոշ հիմնարար թեորեմներ ուռուցիկ
անալիզից, որոնք ունեն կիրառական լայն նշանակություն:

Չորրորդ գլխում շարադրվում է մաթեմատիկական ծը-
րագրավորման խնդիրների լուծման Լագրանժի անորոշ
գործակիցների մեթոդը, երբ սահմանափակումները տրված
են հավասարություններով և անհավասարություններով:

Հինգերորդ գլխում դիտարկվում են վարիացիոն հաշվի
պարզագույն և իզոպերիմետրիկ խնդիրները և արտածվում
է Էյլերի հավասարումը որպես էքստրեմումի անհրաժեշտ
պայման:

Յուրաքանչյուր դասախոսության վերջում բերվում են խնդիրներ և վարժություններ, որոնց լուծումները ուսանողին կօգնեն ավելի լավ յուրացնել շարադրված նյութը: Ձեռնարկում կան նաև առաջադրանքներ, որոնք կարող են իրականացվել համակարգչի օգնությամբ:

Թեորեմի ապացույցը սկսվում է ► նշանով, իսկ ◀ նշանը ազդարարում է ապացույցի ավարտը:

Շնորհակալություն ենք հայտնում ԵՊՏ թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի աշխատակիցներին՝ ձեռնարկում ներկայացված նյութի բովանդակության և շարադրման եղանակների հետ կապված հարցերում օգտակար առաջարկությունների և դիպողությունների համար:

Ռ.Ա. Խաչատրյան

ՆԻՄՆԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՄՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

- $x \in X$ – x փարրը պարկանում է X բազմությանը
- $X \cap Y$ – բազմությունների հատում
- $X \cup Y$ – բազմությունների միավորում
- $X \setminus Y$ – բազմությունների փարբերություն
- $X + Y = \{z/z = x + y, x \in X, y \in Y\}$ – բազմությունների հանրահաշվական գումար
- \overline{X} – X բազմության փակում
- $\text{int}X$ – X բազմության ներքին կետերի բազմություն
- R^n – n չափանի էվկլիդյան փարածություն
- $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ – $x, y \in R^n$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ
- $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ – $x \in R^n$ վեկտորի նորմ
- $B_r(a) = \{x \in R^n / \|x - a\| \leq r\}$ – a կենտրոնով r շառավղով գունդ
- $C^1[a, b]$ – $[a, b]$ հարվածի վրա որոշված անընդհար դիֆերենցելի ֆունկցիաների փարածություն հետևյալ նորմով.

$$\|y(\cdot)\|_1 = \max\left\{\max_{x \in [a, b]} |y(x)|, \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|\right\}$$

- $o(\alpha)$ – թվային ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$$

Գլուխ 1

Նիւնական գաղափարներ և թեորեմներ

Այս գլխում բերվում են որոշ սահմանումներ և թեորեմներ ուռուցիկ անալիզից: Դիփարկվում է ողորկ ֆունկցիայի մի-նիմիզացիայի խնդիրը R^n եվկլիդյան փարածության վրա: Շարադրվում են օպտիմալության առաջին ու երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները:

Ենթադրվում է, որ ընթերցողը ծանոթ է մաթեմատիկական անալիզի և գծային հանրահաշվի հիմնարար գաղափարներին:

1.1 Նախնական սահմանումներ

Դիցուք $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n փոփոխականի ֆունկցիա է՝ որոշված R^n եվկլիդյան փարածության վրա: Եթե f ֆունկցիան, ըստ բոլոր փոփոխականների, ունի մասնակի ածանցյալներ $x \in R^n$ կետում, ապա նրա գրադիենտը այդ կետում նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$f'(x) \equiv (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x)) :$$

Սահմանում 1.1.1: Դիցուք $f(x)$ -ը երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է $x \in R^n$ կետում:

Ներկայի սինտրիկ մատրիցը կոչվում է հեսիան

$$H(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & f''_{x_1x_2}(x) & \dots & f''_{x_1x_n}(x) \\ f''_{x_2x_1}(x) & f''_{x_2x_2}(x) & \dots & f''_{x_2x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1}(x) & f''_{x_nx_2}(x) & \dots & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix} :$$

Դիցուք

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

կամայական մատրից է:

Սահմանում 1.1.2: \mathbf{A} մատրիցի k -րդ կարգի գլխավոր միևնուր կոչվում է $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ համարներով որոշերի և այդ նույն համարներով սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերից կազմված որոշիչը:

Սահմանում 1.1.3: $(\mathbf{A}x, x)$ քառակուսային ձևը կոչվում է

- դրական որոշյալ ($\mathbf{A} > 0$), եթե $(\mathbf{A}x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad x \in R^n$,
- դրական կիսաորոշյալ ($\mathbf{A} \geq 0$), եթե $(\mathbf{A}x, x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n$,
- բացասական որոշյալ ($\mathbf{A} < 0$), եթե $(\mathbf{A}x, x) < 0 \quad \forall x \neq 0, \quad x \in R^n$,
- բացասական կիսաորոշյալ ($\mathbf{A} \leq 0$), եթե $(\mathbf{A}x, x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n$:

Կարևոր կիրառական նշանակություն ունի հետևյալ պնդումը (տես, օրինակ՝ [10]):

Թեորեմ 1.1.1 (Միլվեսարի հայտանիշը):

Դիցուք $A(n \times n)$ սիմետրիկ մատրից է:

- 1) Որպեսզի A մատրիցը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գլխավոր անկյունագծային միևնորեները լինեն դրական՝

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 :$$

- 2) Որպեսզի A մատրիցը լինի բացասական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$:

- 3) Որպեսզի A մատրիցը լինի դրական կիսաորոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գլխավոր միևնորեները լինեն ոչ բացասական:

- 4) Որպեսզի A մատրիցը լինի բացասական կիսաորոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զույգ կարգի գլխավոր միևնորեները լինեն ոչ բացասական, իսկ կենտ կարգի գլխավոր միևնորեները լինեն ոչ դրական:

Սահմանում 1.1.4: $M \subseteq R^n$ բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $x^1, x^2 \in M$ կետերի և ցանկացած $\alpha \in [0, 1]$ թվի համար տեղի ունի հերկայւր՝

$$\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \in M :$$

Սա նշանակում է, որ բազմությանը պատկանող երկու կետերը միացնող հատվածը ընկած է այդ նույն բազմության մեջ:

Սահմանում 1.1.5: $f(x)$ ֆունկցիան $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $x^1, x^2 \in M$ կետերի և ցանկացած $\alpha \in [0, 1]$ թվի համար տեղի ունի

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) \quad (1.1.1)$$

անհավասարությունը:

Թեորեմ 1.1.2: Դիցուք f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա և դիֆերենցելի է $x^* \in M$ կետում: Այդ դեպքում

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) \quad \forall x \in M : \quad (1.1.2)$$

► Ըստ ուռուցիկ ֆունկցիայի (1.1.1) սահմանման կամայական $x \in M$ վեկտորի և ցանկացած $\alpha \in [0, 1]$ թվի համար ունենք

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x^*) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x^*)$$

անհավասարությունը: Այսպեղից, հաշվի առնելով, որ f ֆունկցիան դիֆերենցելի է x^* կետում, կստանանք

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{f(x^* + \alpha(x - x^*)) - f(x^*)}{\alpha} =$$

$$= \frac{(f'(x^*), \alpha(x - x^*)) + o(\alpha)}{\alpha} = (f'(x^*), x - x^*) + \frac{o(\alpha)}{\alpha} :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\alpha \rightarrow 0$, կստանանք պահանջվող անհավասարությունը: (1.1.2)-ը կոչվում է ուռուցիկ ֆունկցիայի **հիմնական անհավասարություն**:

Դա նշանակում է, որ եթե f ուռուցիկ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x^* կետում, ապա նրա գրաֆիկը գտնվում է $(x^*, f(x^*))$ կետով փարված շոշափող հարթությունից վերև:



Սահմանում 1.1.6: $f(x)$ ֆունկցիան $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է **ուժեղ ուռուցիկ** $\theta > 0$ հաստատունով, եթե

$$f(x^1) - f(x^2) \geq (f'(x^2), x^1 - x^2) + \theta \|x^1 - x^2\|^2 \quad \forall x^1, x^2 \in M :$$

Եթե ֆունկցիան երկու անգամ անընդհար դիֆերենցելի է, ապա նրա ուռուցիկությունը ամբողջ փարածության վրա կարելի է ստուգել հետևանի նշանի միջոցով: Այդ մասին է հերևյալ պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [8]):

Թեորեմ 1.1.3: Դիցուք f -ը երկու անգամ անընդհար դիֆերենցելի է R^n -ի վրա: Այդ դեպքում՝

ա) եթե $H(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n$, ապա f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է R^n -ի վրա,

բ) եթե $(H(x)h, h) \geq \theta \|h\|^2 \quad \forall x, h \in R^n$, ապա f -ը ուժեղ ուռուցիկ է θ հաստատունով R^n -ի վրա:

Դիցուք փրված է $f(x)$ ֆունկցիան R^n -ի վրա և M -ը ենթաբազմություն է R^n -ից:

Սահմանում 1.1.7: $x^* \in M$ կերպը կանսխանեմը՝

1) f -ի գլոբալ մինիմումի (գլոբալ մաքսիմումի) կերպ M բազմության վրա, եթե

$$f(x) \geq f(x^*) \quad (f(x) \leq f(x^*)) \quad \forall x \in M,$$

2) f -ի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կերպ M բազմության վրա, եթե գոյություն ունի այդ կերպի այնպիսի V շրջակայք, որ

$$f(x) \geq f(x^*) \quad (f(x) \leq f(x^*)) \quad \forall x \in M \cap V :$$

Ֆունկցիայի մինիմումի և մաքսիմումի կերպերը
կոչվում են էքստրեմումի կերպեր:

Տեսական կարևոր նշանակություն ունեն հեփկյալ թեո-
րեմները, որոնք բերում ենք առանց ապացույցի (փեն,
օրինակ՝ [4]):

Թեորեմ 1.1.4: Ուռուցիկ բազմության վրա ուռուցիկ
ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կերպը հասնդիսանում է նաև
գլոբալ մինիմումի կերպ:

Թեորեմ 1.1.5: Ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիան փակ ուռուցիկ
բազմության վրա ունի միակ մինիմումի կերպ այդ
բազմության վրա:

Թեորեմ 1.1.6: Դիցուք $M \subseteq R^n$ ուռուցիկ կոմպակտ է,
իսկ $f(x)$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված R^n -ի վրա: Ե-
թե f -ը M -ի վրա հասարարունից տարբեր է, ապա նա
այդ բազմության վրա հասնում է իր մեծագույն արժեքին
միայն M -ի եզրային կերպերում:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք M -ը ուռուցիկ բազմություն է:
Ապացուցել, որ

$$(\alpha_1 + \alpha_2)M = \alpha_1 M + \alpha_2 M \quad \forall \alpha_1 \geq 0, \quad \forall \alpha_2 \geq 0 :$$

2. Ննարավոր է արդյոք, որ երկու ոչ ուռուցիկ բազմությունների հանրահաշվական գումարը լինի ուռուցիկ:
3. Ննարավոր է արդյոք, որ ուռուցիկ և ոչ ուռուցիկ բազմությունների հանրահաշվական գումարը լինի ուռուցիկ:
4. Դիցուք M -ը ուռուցիկ բազմություն է:
Ապացուցել, որ

ա) $\overline{\text{int}M} = \overline{M}$,

բ) \overline{M} -ը ուռուցիկ է,

գ) $\text{int}\overline{M} = \text{int}M$:

5. Ապացուցել, որ երբ բազմությունը փակ է, անսահմանափակ և ուռուցիկ, ապա նրա կամայական կետով կարելի է քանել ճառագայթ, որն ամբողջովին ընկած կլինի այդ բազմության մեջ:
6. Ուսումնասիրել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 :$$

7. Ուսումնասիրել հետևյալ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_1^2 - x_2^2 :$$

6. Ցույց տալ, որ

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

ֆունկցիան ուռուցիկ է R^2 -ի վրա:

8. Նկարագրել բազմություն, որի վրա

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$$

ֆունկցիան լինի ուռուցիկ:

9. a, b, c , պարամետրերի ինչպիսի արժեքների դեպքում

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ R^2 -ի վրա:

10. $f(x)$ ֆունկցիայի վերգրաֆիկ M ուռուցիկ բազմության վրա կոչվում է հետևյալ բազմությունը.

$$epi(f) \equiv \{(\alpha, x) \in R^{n+1} / x \in M, \alpha \geq f(x)\} :$$

Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի f -ը լինի ուռուցիկ M ուռուցիկ բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա վերգրաֆիկը լինի ուռուցիկ բազմություն:

11. Դիցուք $f(x)$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա և

$$x^i \in M, \alpha_i \geq 0, i \in [1 : m], \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 :$$

Ապացուցել, որ

$$f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x^i) :$$

Այս անհավասարությունը կոչվում է Յենսենի անհավասարություն:

12. Դիցուք $f(x)$ ուռուցիկ ֆունկցիան սահմանափակ է R^n -ի վրա: Ապացուցել, որ f -ը հասարարուն է:

1.2 Էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները

Թեորեմ 1.2.1 (Էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք x^* -ը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n -ի վրա և f -ը դիֆերենցելի է այդ կետում:

Այդ դեպքում f ֆունկցիայի գրադիենտը x^* կետում հավասար է զրոյի, այսինքն $f'(x^*) = 0$, կամ, որ նույնն է՝

$$f'_{x_i}(x^*) = 0, i \in [1 : n] :$$

► Քանի որ x^* -ը լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է, ապա օգտվելով ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմանից,

կամայական h վեկտորի և բավականաչափ փոքր α թվերի համար կունենանք

$$0 \underset{(\geq)}{\leq} f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = (f'(x^*), \alpha h) + o(\alpha) :$$

Բաժանելով այս անհավասարության երկու մասերը $\alpha > 0$ թվի վրա և ձգպեցնելով α -ն գրոյի՝ կստանանք

$$(f'(x^*), h) \geq 0 \quad ((f'(x^*), h) \leq 0) \quad \forall h \in R^n :$$

Այսպեղից անմիջականորեն հետևում է, որ $f'(x^*) = 0$:



Թեորեմ 1.2.2 (*Մինիմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանը ուռուցիկ ֆունկցիայի համար*):

Դիցուք f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է որոշված R^n -ի վրա և դիֆերենցելի է x^ կետում: Որպեսզի x^* -ը լինի f -ի մինիմումի կետ R^n -ի վրա անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x^*) = 0$:*

▶ Անհրաժեշտությունը հետևում է **թեորեմ 1.2.1-ից**: Ապացուցենք բավարարությունը: Օգտվելով ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարությունից՝ ստանում ենք

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) = 0, \quad \forall x \in R^n :$$

Այսպեղից հետևում է, որ x^* -ը f -ի մինիմումի կետ է R^n -ի վրա:



Թեորեմ 1.2.3 (*Էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը*): *Դիցուք x^* -ը f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n -ի վրա և f -ը երկու անգամ դիֆերենցելի է այդ կետում:*

Այդ դեպքում $H(x^*)$ -ը դրական կհաստորոշյալ է (բացասական կհաստորոշյալ է), այսինքն

$$H(x^*) \geq 0 \quad (H(x^*) \leq 0) :$$

► Քանի որ x^* -ը լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է, իսկ f -ը երկու անգամ դիֆերենցելի է այդ կետում, ապա կամայական $h \in R^n$ վեկտորի և բավականաչափ փոքր α թվերի համար ունենք

$$0 \underset{(\geq)}{\leq} f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = 1/2(H(x^*)\alpha h, \alpha h) + o(\alpha^2) :$$

Բաժանելով այս անհավասարության երկու մասերը α^2 թվի վրա և ձգտեցնելով α -ն զրոյի՝ կստանանք պահանջվող անհավասարությունը:

◀

Թեորեմ 1.2.4 (Էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանները): Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x^* կետում և տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

$$f'(x^*) = 0, \quad H(x^*) > 0 \quad (H(x^*) < 0) :$$

Այդ դեպքում x^* -ը f -ի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է R^n -ի վրա:

► Ենթադրենք հակառակը: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի $\{x^k\}$ հաջորդականություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$x^k \rightarrow x^*, \quad f(x^k) < f(x^*) \quad (f(x^k) > f(x^*)) :$$

Նշանակելով $\alpha_k = \|x^k - x^*\|$, $h^k = (x^k - x^*)/\alpha_k$, կունենանք

$$x^k = x^* + \alpha_k h^k :$$

Քանի որ $\|h^k\| = 1$, ապա ընդհանրությունը չխախտելով կարող ենք ենթադրել, որ $h^k \rightarrow h^0 \neq 0$: Նաշվի առնելով թեորեմի ենթադրության $f'(x^*) = 0$ պայմանը՝ կունենանք

$$0 \underset{(\leq)}{\geq} f(x^k) - f(x^*) = 1/2(H(x^*)\alpha_k h^k, \alpha_k h^k) + o(\alpha_k^2) :$$

Բաժանելով այս անհավասարություն երկու մասերը α_k^2 -ի վրա և անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(H(x^*)h^0, h^0) \leq 0 \quad (H(x^*)h^0, h^0) \geq 0),$$

որը հակասում է թեորեմի ենթադրությանը:



Պարզագույն դեպքերում էքստրեմումի առաջին և երկրորդ կարգի անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները էֆեկտիվ միջոցներ են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը ճշգրիպ գտնելու համար:

Օրինակ: Գտնել

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը R^3 -ի վրա:

Լուծում: Ըստ մինիմումի անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$f'_{x_1} = 3x_1^2 - 3 = 0, \quad f'_{x_2} = 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \quad f'_{x_3} = 2x_3 + x_2 = 0 :$$

Լուծելով այս համակարգը, կստանանք երկու ստացիոնար կետ՝

$$x^1 = (1, -4, 2) \text{ և } x^2 = (-1, -4, 2) :$$

Ունենք նաև, որ

$$f''_{x_1x_1} = 6x_1, f''_{x_1x_2} = 0, f''_{x_1x_3} = 0,$$
$$f''_{x_2x_2} = 2, f''_{x_2x_3} = 1, f''_{x_3x_3} = 2 :$$

Այժմ յուրաքանչյուր ստացիոնար կետի համար կարելի է կազմել հեսիանը և ստուգել նրա նշանը: x^1 կետի համար հեսիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$H(x^1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

Քանի որ

$$\Delta_1 = 6, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0, \Delta_3 = 18 > 0,$$

ապա x^1 -ը լոկալ մինիմումի կետ է: Ուսումնասիրենք x^2 կետը: Այդ կետում հեսիանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$H(x^2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

Քանի որ $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = -12 < 0$, $\Delta_3 = -18 < 0$, ապա էքստրեմումի բավարար պայմանները տեղի չունեն: Ստուգենք երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները: Առաջին կարգի գլխավոր մինորներն են՝ -6 , 2 , 2 թվերը: Երկրորդ կարգի գլխավոր մինորներն են՝ 3 , -12 , -12 : Երրորդ կարգի գլխավոր մինորը հավասար է Δ_3 -ի, որը բացասական է: Այսպիսով, x^2 կետում էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները չեն կապարվում: Ներկայացնելով, x^2 կետը էքստրեմումի կետ չէ:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը.

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1 + 2x_3 \rightarrow \text{extr} :$$

2. Ստուգել, արդյոք $(1, 1)$ կետը հեղուկալ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, թե ոչ.

$$f(x) = (x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - 1)^2 :$$

Գլուխ 2

Գրադիենտային մեթոդը

Գրադիենտային մեթոդը դասվում է դիֆերենցելի ֆունկցիաների մինիմիզացիայի թվային հիմնական մեթոդների շարքին: Այդ մեթոդի էությունը շատ պարզ է: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա նրա հակադրադիերենսը՝ $h = -f'(x)$ վեկտորը, յուրաքանչյուր x կետում ցույց է փալիս ֆունկցիայի **նվազման ուղղությունը**:

Դա հիմք է փալիս ենթադրել, որ կամայական սկզբնական x^0 կետից սկսվող և $x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x_k)$ ($\alpha_k > 0$) ռեկուրենս առնչությամբ կառուցված հաջորդականության անդամները մեծ k ինդեքսների դեպքում մոտ կլինեն f -ի մինիմումի կետին: Այսպեղ այս ենթադրությունը հիմնավորվում է որոշ դասի ֆունկցիաների և α_k թվերի հարուկ եղանակներով ընտրությունների դեպքերում: Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի բազմազան ալգորիթմների և նրանց պրակտիկ իրականացումների հետ կարելի է ծանոթանալ [3, 4, 6] աշխատանքներում:

2.1 Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի գրադիենտային եղանակների ընդհանուր նկարագրությունը

Սահմանում 2.1.1: h վեկտորը կոչվում է f ֆունկցիայի նվազման ուղղություն x կետում, եթե բավականաչափ փոքր դրական α թվերի համար տեղի ունի

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով, h -ը այն վեկտորն է, որի ուղղությամբ բավականաչափ փոքր շարժվելիս կարելի է ֆունկցիայի արժեքները փոքրացնել:

Լեմմա 2.1.1: Դիցուք f -ը դիֆերենցելի է x կետում և h -ն այնպիսի վեկտոր է, որ տեղի ունի

$$(f'(x), h) < 0$$

անհավասարությունը: Այդ դեպքում h -ը f -ի նվազման ուղղություն է x կետում:

► Քանի որ f -ը դիֆերենցելի է, ապա

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha[(f'(x), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}] :$$

Այսպեղից, բավականաչափ փոքր դրական α թվերի համար միջակ փակագծերում գրած արտահայտությունը դառնում է բացասական: Այնպես որ կստանանք

$$f(x + \alpha h) < f(x) :$$



Դիպողություն: Մասնավորապես, որպես նվազման ուղղություն կարելի է վերցնել $h = -f'(x)$, որը կոչվում է հա-

կազրադիենարի ուղղություն: Կարելի է ցույց փայ, որ հակազրադիենարը փայիս է ֆունկցիայի ամենաարագ նվազման ուղղությունը:

Գրադիենտային վայրէջքի մեթոդները կառուցվում են հետևյալ կերպ: Ընտրվում է կամայական x^0 կետ R^n փարածությունից և կառուցվում է

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.1)$$

ռեկուրենտ առնչությունը: Այսպեղ $h^k = -f'(x^k)$, իսկ α_k թվերը կոչվում են քայլեր, որոնք ընտրվում են որոշակի օրինաչափությամբ: Նայտնի են քայլի ընտրության մի քանի եղանակներ, որոնք ներկայացվում են ստորև:

1. **Քայլի ընտրության ապրիորի եղանակը:** Այս դեպքում α_k քայլերը դրական թվեր են, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$\sum \alpha_k = +\infty, \quad \sum \alpha_k^2 < +\infty :$$

Մասնավորապես, այս պայմաններին բավարարում են

$$\alpha_k = \frac{1}{k+1}, \quad \alpha_k = \frac{\ln(k+1)}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

թվային հաջորդականությունները:

2. **Քայլի ընտրության ամենաարագ վայրէջքի եղանակը:** Այս դեպքում $\alpha_k > 0$ քայլերը ընտրվում են հետևյալ կերպ: Կազմում են $g(\alpha) \equiv f(x^k + \alpha h^k)$ ֆունկցիան և գտնում նրա մինիմումի կետը $(0, \infty)$ միջակայքի վրա: Այն կետը, որտեղ մինիմումը հասանելի է համարվում է α_k , այսինքն՝

$$\alpha_k \equiv \arg \min_{\alpha > 0} g(\alpha) :$$

Որոշ դասի ֆունկցիաների համար կարելի է սրանալ անալիտիկ բանաձևեր α_k քայլերի որոշման համար, ինչպես հետևյալ օրինակում:

Օրինակ: Դիցուք $f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$, որպեսզի \mathbf{A} -ն $(n \times n)$ չափանի սիմետրիկ, դրական որոշյալ մատրից է, իսկ b -ն n չափանի վեկտոր է: Կարելի է ցույց տալ, որ f -ը ուռուցիկ է, ունի միակ մինիմումի կետ R^n -ի վրա և նրա գրադիենտը որոշվում է հետևյալ բանաձևով. $f'(x) = \mathbf{A}x + b$: Այս դեպքում ունենք

$$\begin{aligned} g(\alpha) &\equiv f(x^k + \alpha h^k) = 1/2[\mathbf{A}(x^k + \alpha h^k), x^k + \alpha_k h^k] + \\ &+ (b, x^k + \alpha_k h^k) = \alpha^2 [1/2(\mathbf{A}h^k, h^k)] + \\ &+ \alpha(\mathbf{A}x^k + b, h^k) + (1/2\mathbf{A}x^k + b, x^k) : \end{aligned}$$

Դժվար չէ նկատել, որ սրացված քառակուսային եռանդամը հասնում է իր փոքրագույն արժեքին R^n -ի վրա հետևյալ կերպում.

$$\alpha_k = -\frac{(\mathbf{A}x^k + b, h^k)}{(\mathbf{A}h^k, h^k)} = -\frac{(f'(x^k), h^k)}{(\mathbf{A}h^k, h^k)} \geq 0 \quad (2.1.2)$$

կերպում: Ներկայացրեք,

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h^k) = \min_{\alpha \in R^n} f(x^k + \alpha h^k) :$$

3. Քայլի ընտրության կիսման եղանակը: Ֆիքսում ենք որևէ դրական ε թիվ $(0, 1)$ միջակայքից և $\alpha = 1$ թվի համար ստուգում ենք

$$f(x^k - \alpha f'(x^k)) - f(x^k) \leq -\varepsilon \alpha \|f'(x^k)\|^2 \quad (2.1.3)$$

անհավասարությունը: Եթե այն բերի ունի, ապա α_k -ն համարում ենք հավասար α -ի: Նակառակ դեպքում α -ն կիսում

ենք և նորից ստուգում (2.1.3) անհավասարությունը և այսպես շարունակ: Եթե որևէ p -րդ քայլում բավարարվում է (2.1.3) անհավասարությունը, ապա $\alpha_k = \frac{1}{2^p}$:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների էքստրեմումի կետերը ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով:

Սկզբնական x^0 կետից սկսած կառուցել $\{x^k\}$ հաջորդականությունը (2.1.1) ռեկուրենս առնչությամբ և քայլերի ընտրությունը կապարել (2.1.2) բանաձևով: Եթե $\|f'(x^k)\| < \varepsilon_0$, ապա պրոցեսն ավարտել և x^k -ն համարել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ:

Այսպես $\varepsilon_0 > 0$ թիվը նախապես փրված ճշգրտությունն է:

ա) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 \rightarrow \min, x^0 = (1, 1), \varepsilon_0 = 0.01;$

բ) $-3x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 + 6x_2 - 15 \rightarrow \max, x^0 = (0, 1), \varepsilon_0 = 0.1;$

գ) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2 \rightarrow \min, x^0 = (1, 0), \varepsilon_0 = 0.01 :$

2. Դիցուք f -ը երկու անգամ դիֆերենցելի է x կետում և

$$(f'(x), h) = 0, (f''(x), h) < 0 :$$

Ապացուցել, որ h -ը f ֆունկցիայի նվազման ուղղությունն է:

3. Դիցուք $H(x) = f''(x)$ հետևանքը դրական որոշյալ է և $f'(x) \neq 0$: Ապացուցել, որ

$$h = -H(x)^{-1}f'(x)$$

վեկտորը f ֆունկցիայի նվազման ուղղություն է:

Առաջադրանք 1: Գրել ծրագիր, որը մինիմիզացնում է $f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$ ֆունկցիան R^n -ի վրա: Այսպես \mathbf{A} -ն ($n \times n$) չափանի սիմետրիկ, դրական որոշյալ մատրից է, իսկ b -ն n չափանի վեկտոր է: Մուտքի փվյալներն են $\mathbf{A}, b, x^0, n, \varepsilon, \varepsilon_0$ պարամետրերը: Այսպես ε_0 -ն ճշտությունն է: Կառուցել $\{x^k\}$ հաջորդականությունը գրադիենտային իջեցման երեք մեթոդներով և համեմատել դրանք քայլերի քանակի տեսակետից: Եթե $\|f'(x^k)\| < \varepsilon_0$, ապա պրոցեսն ավարտել և համարել x^k -ն մինիմումի կետ: Նամենատել սպացված արդյունքները $x^* = \mathbf{A}^{-1}b$ վեկտորի հետ, որը f -ի մինիմումի կետն է :

2.2 Քայլի կիսման եղանակի զուգամիություն թեորեմը

Լեմմա 2.2.1: Դիցուք f ֆունկցիայի համար ճիշտ են հետևյալ պայմանները.

- 1) f ֆունկցիայի գրադիենտը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, այսինքն գոյություն ունի այնպիսի $L > 0$ հաստատում, որ

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n :$$

- 2) f -ը ներքևից սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $m > 0$ թիվ, որ տեղի ունի

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in R^n$$

անհավասարությունը:

Այդ դեպքում քայլի կիսման եղանակով վերջավոր քայլերի ընթացքում ընտրվում է α_k -ն և

$$\alpha_k > (1 - \varepsilon)/L > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots :$$

► Դիցուք $h^k = -f'(x^k)$: Նամաձայն Լագրանժի միջին արժեքի վերաբերյալ թեորեմի՝ գոյություն ունի $\theta \in (0, 1)$ հասարակուն այնպիսին, որ եթե $\alpha > (1 - \varepsilon)/L$, ապա

$$\begin{aligned} f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) &= (f'(x^k + \alpha \theta h^k), \alpha h^k) = \\ &= (f'(x^k + \alpha \theta h^k) - f'(x^k), \alpha h^k) + \alpha (f'(x^k), h^k) \leq \\ &\leq \|L\alpha \theta h^k\| \|\alpha h^k\| - \alpha \|f'(x^k)\|^2 \leq L\alpha^2 \|f'(x^k)\|^2 - \\ &- \alpha \|f'(x^k)\|^2 = -\alpha \|f'(x^k)\|^2 (1 - \alpha L) \leq -\varepsilon \alpha \|f'(x^k)\|^2 : \end{aligned}$$

◀

Թեորեմ 2.2.1: Դիցուք f ֆունկցիան քաղարարում է **լեմմա 2.2.1-ի** բոլոր պայմաններին և $\{x^k\}$ -ն կիսման մեթոդով կառուցված հաջորդականությունն է:

Այդ դեպքում $f'(x^k) \rightarrow 0$, երբ $k \rightarrow \infty$:

► Ունենք

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq -\varepsilon \alpha \|f'(x^k)\|^2 : \quad (2.2.1)$$

Այսպեղից հետևում է, որ $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$: Այսինքն, $\{f(x^k)\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է և ներքևից սահմանափակ է: Ներկաբար, հաջորդականությունը զուգամեր է, այսինքն՝

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \rightarrow 0 :$$

(2.2.1)-ից հետևում է, որ

$$\|f'(x^k)\|^2 \leq \frac{f(x^k) - f(x^{k+1})}{\varepsilon \alpha_k} :$$

Այսպետից, քանի որ, ըստ **լեմմա 2.2.1-ի**, $\alpha_k > (1-\varepsilon)/L > 0$, ապա $f'(x^k) \rightarrow 0$:



Թեորեմ 2.2.2: Ենթադրենք գոյություն ունեն այնպիսի դիսկուս $D > 0$, $d > 0$ հասարակություններ, որ

$$D\|h\|^2 \geq (f''(x)h, h) \geq d\|h\|^2 \quad \forall x, h \in R^n : \quad (2.2.2)$$

Այդ դեպքում կհսման եղանակով կառուցված $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է f -ի միակ x^* միհմումի կետին երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:

Այսինքն՝ գոյություն ունեն $C > 0$ և $q \in (0, 1)$, հասարակություններ այնպիսին, որ

$$\|x^k - x^*\| \leq Cq^k, \quad k = 0, 1, \dots :$$

► Քանի որ $f'(x^*) = 0$, ապա, ըստ Թեյլորի բանաձևի,

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2}(f''(x^* + \theta(x - x^*))(x - x^*), x - x^*),$$

որտեղ $\theta \in (0, 1)$: Այսպետից, հաշվի առնելով (2.2.2) անհավասարությունը, ստանում ենք

$$\frac{d}{2}\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{D}{2}\|x - x^*\| : \quad (2.2.3)$$

Նաշվի առնելով այս պայմանը և ներկայացնելով f ֆունկցիան Թեյլորի բանաձևի տեսքով x կետում՝ կունենանք

$$\begin{aligned} f(x^*) - f(x) &= (f'(x), x^* - x) + \\ &+ 1/2(f''(x + \theta(x^* - x))(x^* - x), x^* - x) \geq \\ &\geq -\|f'(x)\|\|x - x^*\| + d/2\|x - x^*\|^2 : \end{aligned}$$

Այստեղից կստանանք

$$f(x) - f(x^*) \leq \|f'(x)\|\|x - x^*\| - d/2\|x - x^*\|^2 : \quad (2.2.4)$$

Նաշվի առնելով նաև (2.2.3) անհավասարության ձախ մասը՝ (2.2.4)-ից կստանանք

$$\frac{d}{2}\|x - x^*\|^2 \leq \|f'(x)\|\|x - x^*\| - d/2\|x - x^*\|^2 :$$

Ներկայացնելով,

$$\|x - x^*\| \leq \frac{\|f'(x)\|}{d} : \quad (2.2.5)$$

Օգտվելով (2.2.3)-(2.2.5) անհավասարություններից՝ ստանում ենք

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{\|f'(x)\|^2}{d} - d/D(f(x) - f(x^*)) :$$

Այստեղից

$$\|f'(x)\|^2 \geq d(1 + d/D)(f(x) - f(x^*)) : \quad (2.2.6)$$

Կիրառելով (2.2.6) անհավասարությունը կիսման մեթոդի

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq -\varepsilon\alpha_k\|f'(x^k)\|^2$$

անհավասարությունում՝ կսփանանք

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq [1 - \varepsilon\alpha_k d(1 + d/D)](f(x^k) - f(x^*)) :$$

Այսպեղից, հաշվի առնելով $\alpha_k > \bar{\alpha} \equiv (1 - \varepsilon)/L > 0$ անհավասարությունը, կսփանանք

$$f(x^k) - f(x^*) \leq (f(x^0) - f(x^*))\bar{q}^k, \quad (2.2.7)$$

որպեղ

$$\bar{q} = 1 - \varepsilon\bar{\alpha}d(1 + d/D) :$$

Վերջապես, օգտվելով (2.2.3) և (2.2.7) անհավասարությունից, կսփանանք

$$\|x^k - x^*\| \leq \sqrt{\frac{2}{d}}\sqrt{f(x^k) - f(x^*)} \leq Cq^k,$$

որպեղ

$$C = \sqrt{\frac{2}{d}}\sqrt{f(x^0) - f(x^*)}, \quad q = \sqrt{\bar{q}} :$$



Քայլի կիսման եղանակի արակտրիկ իրականացումների ժամանակ սովորաբար օգտվում են նրա հետևյալ մոդիֆիկացված փարբերակից: k -րդ քայլում որպես ֆունկցիայի նվազման ուղղություն վերցնում են

$$h^k = -\frac{f'(x^k)}{\|f'(x^k)\|}$$

վեկտորը, իսկ α_k քայլի երկարությունը ընտրվում է կիսման եղանակի հետևյալ պայմանից.

$$f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) \leq -\alpha\varepsilon\|f'(x^k)\| : \quad (2.2.8)$$

Նաջորդ x^{k+1} կետը կառուցվում է

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k \quad (2.2.9)$$

ռեկուրենս առնչությամբ:

Այժմ քայլի կիսման եղանակը մեկնաբանենք հետևյալ պարզ օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Քայլի կիսման եղանակով գտնել

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$$

Փունկցիայի մինիմումի կետը R^2 -ի վրա: Որպես սկզբնական մոտավորություն վերցնել $x^0 = (-2, 1)$ կետը: ε պարամետրի արժեքը վերցնել հավասար 0.5-ի: Կատարել իտերացիայի մեկ քայլ:

Լուծում: Քայլի կիսման եղանակի իտերացիայի (2.2.9) բանաձևը այս խնդրի համար ունի հետևյալ տեսքը.

$$x^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} h_1^k \\ h_2^k \end{pmatrix}: \quad (2.2.10)$$

Մասնակի ածանցյալների և գրադիենտի նորմի համար ունենք հետևյալ բանաձևերը.

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = 8x_2 + 6x_1, \quad (2.2.11)$$

$$\|f'(x)\| = \sqrt{(8x_1 + 6x_2)^2 + (8x_2 + 6x_1)^2}, \quad (2.2.12)$$

$$h_1^k = -\frac{8x_1^k + 6x_2^k}{\|f'(x^k)\|}, \quad h_2^k = -\frac{6x_1^k + 8x_2^k}{\|f'(x^k)\|}: \quad (2.2.13)$$

Առաջին իտերացիայում $k = 0$:

Օգտագործելով (2.2.10) – (2.2.13) բանաձևերը՝ կստանանք

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = 8x_1^0 + 6x_2^0 = 8(-2) + 6 = -10,$$

$$f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = 6x_1^0 + 8x_2^0 = -4,$$

$$\|f'(x^0)\| = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2} \approx 10.77, \quad h_1^0 = \frac{10}{10.77} \approx 0.93,$$

$$h_2^0 = \frac{4}{10.77} \approx 0.37 :$$

Դիցուք $\alpha = 1$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով այս արդյունքները, մեկնարկային $(-2, 1)$ արժեքը և (2.2.10)-ը, կստանանք

$$x \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.93 \\ 0.37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.07 \\ 1.63 \end{pmatrix} :$$

Առաջին իտերացիայի համար α_0 քայլի ընտրության պայմանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) - f(x^0) \leq -0.5\alpha \|f'(x^0)\| :$$

Կատարելով համապատասխան հաշվարկներ՝ նկատում ենք, որ այս անհավասարության ձախ մասը մոտավորապես հավասար է -1.6 -ի, իսկ աջ մասը հավասար է -5.4 -ի: Նեղակաբար, այն տեղի չունի: Այժմ կիսենք α թիվը և նորից ստուգենք անհավասարությունը: Այս դեպքում

$$x = (-1.58, 1.18) :$$

Քանի որ $f(x^0) = 8$, $f(x) \approx 4.16$, ապա անհավասարության ձախ մասը հավասար է $4.16 - 8 = -3.84$, իսկ աջ մասը, հեշտ է նկատել, որ հավասար է -2.69 -ի:

Այսպիսով, նշված անհավասարությունը տեղի ունի և հետևաբար՝

$$\alpha_0 = 0.5, \quad x^1 = (-1.54, 1.18) :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Քայլի կիսման եղանակով լուծել հետևյալ էքստրեմումի խնդիրները: Վերցնել $x^0 = (1, 1)$, $\varepsilon = 0.5$:
Կատարել իրերացիայի մեկ քայլ:

1. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min$:
2. $-2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2 \rightarrow \max$:

2.3 Գծայնացման մեթոդը

Դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի հետևյալ խնդիրը.

$$f(x) \rightarrow \min, x \in M : \quad (2.3.1)$$

Այս խնդրում f -ը դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ $M \subset R^n$ -ը կոմպակտ ուռուցիկ բազմություն է:

Տանք գծայնացման մեթոդի համառոտ նկարագրությունը: Ընտրում ենք կամայական x^0 կետ M բազմությունից և կառուցում ենք $\{x_k\}$ հաջորդականությունը

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, k = 0, 1, \dots$$

ռեկուրենտ առնչությամբ: Այսպես h^k վեկտորը f -ի այնպիսի նվազման ուղղություն է $x^k \in M$ կետում, որ բավականաչափ փոքր α_k քայլերի դեպքում $x_{k+1} \in M$: h^k վեկտորի որոշման համար k -րդ քայլում լուծում ենք հետևյալ միջանկյալ խնդիրը.

$$(f'(x^k), x - x^k) \rightarrow \min, x \in M :$$

Ենթադրենք \bar{x}_k -ն այդ խնդրի որևէ լուծում է: Նշանակենք

$$\eta_k = (f'(x^k), \bar{x}_k - x^k), h^k = \bar{x}_k - x^k :$$

h^k վեկտորը կոչվում է պայմանական հակազդողի ենթ: Ալնհայր է, որ $\eta_k \leq 0$: Իրոք,

$$\eta_k = \min_{x \in M} (f'(x^k), x - x^k) \leq (f'(x^k), x^k - x^k) \leq 0 :$$

Եթե $\eta_k < 0$, ապա ընտրում ենք α_k քայլը կիսման մեթոդով: Վերցնում ենք $\alpha = 1$ և ստուգում

$$f(x^k + \alpha h^k) - f(x^k) \leq \alpha \eta_k \quad (2.3.2)$$

անհավասարությունը: Եթե այն տեղի ունի, ապա համարում ենք $\alpha_k = 1$, հակառակ դեպքում α -ն կիսում ենք և նորից ստուգում նշված անհավասարությունը և այսպես շարունակ: Երբ առաջին անգամ տեղի ունենա (2.3.2) անհավասարությունը, ապա այդ α -ն համարվում է α_k -ի արժեք և ցիկլը ավարտվում է: Այնուհետև կառուցում ենք x^{k+1} կետը ռեկուրենս առընչությամբ.

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k :$$

Թեորեմ 2.3.1: *Դիցուք*

- ա) $M \subset R^n$ -ը ուռուցիկ կոնվեքս է,*
- բ) $f(x)$ -ը դիֆերենցելի է և ուռուցիկ M -ի վրա,*
- գ) $f'(x)$ գրադիենտը M բազմության վրա բավարարում է Լիպշիցի պայմանին:*

Այդ դեպքում

- 1) եթե որևէ k -րդ քայլում $\eta_k = 0$, ապա x^k -ն (2.3.1) խնդրի լուծումն է և սլոպրիթմն ավարտվում է,*

2) եթե $\eta_k < 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ապա

$$f(x^k) \rightarrow \min_{x \in M} f(x) :$$

► Դիցուք $\eta_k = 0$: Ըստ ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարության՝ ունենք

$$f(x) - f(x^k) \geq (f'(x^k), x - x^k) \geq \eta_k = 0 \quad \forall x \in M,$$

այսինքն x^k -ն (2.3.1) խնդրի լուծումն է:

Յույց Կանք, որ h^k ուղղությամբ բավականաչափ փոքր շարժվելիս մնում ենք M բազմության մեջ: Իրոք, քանի որ M -ը ուռուցիկ է, ապա

$$x^k + \alpha h^k = x^k + \alpha(\bar{x}_k - x^k) = (1 - \alpha)x^k + \alpha\bar{x}_k \in M, \quad \forall \alpha \in [0, 1] :$$

Քանի որ f -ի գրադիենտը M կոմպակտի վրա բավարարում է Լիպշիցի պայմանին և $x_k \in M$, ապա կարելի է ցույց փայ, որ վերջավոր քայլերից հետո (2.3.2) անհավասարությունը փտելի ունի և հետևաբար α_k քայլը ընտրվում է: Միաժամանակ գոյություն ունի այնպիսի $\bar{\alpha} > 0$ թիվ, որ $\alpha_k > \bar{\alpha} > 0$, $k = 0, 1, \dots$ (փեն, օրինակ՝ [8], լեմմա 3.1, էջ 229):

Այժմ ապացուցենք, որ

$$f(x^k) \rightarrow \min_{x \in M} f(x) :$$

Նամաձայն (2.3.2) անհավասարության՝ ունենք

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \varepsilon \alpha_k \eta_k : \quad (2.3.3)$$

Գումարելով (2.3.3) անհավասարությունները $k \in [0 : m - 1]$ ինդեքսների համար՝ կստանանք

$$\min_{x \in M} f(x) - f(x^0) \leq f(x^m) - f(x^0) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \eta_k :$$

Այսպետից հետևում է, որ բացասական անդամներով $\sum \alpha_k \eta_k$ շարքը զուգամեար է: Ներկաբար, նրա ընդհանուր անդամը ձգպում է գրոյի՝

$$\alpha_k \eta_k \rightarrow 0 : \quad (2.3.4)$$

Քանի որ $\alpha_k > \bar{\alpha} > 0$, ապա (2.3.4)-ից հետևում է, որ $\eta_k \rightarrow 0$: Այսպետից, ընտրելով $x^{k_j} \rightarrow x^* \in M$ զուգամեար ենթահաջորդականությունը և օգտվելով ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարությունից, կստանանք՝

$$f(x) - f(x^{k_j}) \geq (f'(x^{k_j}), x - x^{k_j}) \geq \eta_{k_j} \quad \forall x \in M : \quad (2.3.5)$$

Քանի որ $\eta_{k_j} \rightarrow 0$ և $x^{k_j} \rightarrow x^*$, ապա (2.3.5) անհավասարությունում անցնելով սահմանի, կստանանք՝

$$f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in M,$$

այսինքն, x^* -ը f -ի մինիմումի կետն է M բազմության վրա: Այսպիսով, ապացուցվեց, որ $\{f(x^k)\}$ հաջորդականության $\{f(x^{k_j})\}$ ենթահաջորդականությունը զուգամիտում է $\min_{x \in M} f(x)$: Մյուս կողմից, քանի որ $\{f(x^k)\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է, ապա այն նույնպես կզուգամիտի $\min_{x \in M} f(x)$ -ին:



ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Ապացուցել պնդումները հեպկյալ խնդրի համար.

$$(c, x) \rightarrow \min, x \in M :$$

ա) Եթե $M = \{x \in R^n / \|x - x^0\| \leq r\}$,

ապա

$$x^* = x^0 + \frac{c}{\|c\|} r$$

վեկտորը խնդրի լուծումն է:

բ) Եթե $M = \{x \in R^n / a_j \leq x_j \leq b_j, j \in [1 : n]\}$,

ապա

$$x_j^* = \begin{cases} a_j, & \text{եթե } c_j \geq 0, \\ b_j, & \text{եթե } c_j < 0 \end{cases}$$

կոորդինատներով վեկտորը խնդրի լուծումն է:

2. Գտնել $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ֆունկցիայի պայմանական հակազրադիենսը $x = (2, 3)$ կետում $M = \{x \in R^2 / x_1 + x_2 \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ բազմության վրա:

Առաջադրանք 2: Կազմել ծրագիր, որը իրականացնում է $f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$ ֆունկցիայի մինիմիզացիան $M = \{x \in R^n / \mathbf{C}x \leq d, x \geq 0\}$ բազմության վրա պայմանական գրադիենտի մեթոդով: Այսպես \mathbf{A} -ն ($n \times n$) չափանի սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրից է, իսկ \mathbf{C} -ն ($m \times n$) չափանի մատրից է: k -րդ քայլում օգտագործելով սիմպլեքս ալգորիթմը՝ սրանալ

$$\eta_k = \min_{x \in M} (f'(x^k), x - x^k)$$

խնդրի որևէ լուծում: Ալգորիթմի կանգառի համար ընդունել $|\eta_k| < \varepsilon_0$ պայմանը, որպեսզի $\varepsilon_0 > 0$ նախապես փոքր ճշգրտություն է: Եթե նշված պայմանը կատարվում է, ապա x^k վեկտորը համարել խնդրի լուծում և ավարտել ալգորիթմը: Սկզբնական $x^0 \in M$ կետի ընտրությունը նույնպես կատարել սինպլեքս ալգորիթմով:

2.4 Ապրիորի մեթոդի զուգամիությունը

Թեորեմ 2.4.1: *Դիցուք f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է որոշված R^n -ի վրա և M^* -ը նրա մինիմումի կետերի բազմությունն է R^n -ի վրա: Ենթադրենք $M^* \neq \emptyset$: Դիցուք $\{x^k\}$ -ն հետևյալ ռեկուրենտ առնչությանը կառուցված հաջորդականություն է.*

$$x^0 \in R^n, x^{k+1} = x^k - \alpha_k \frac{f'(x^k)}{\|f'(x^k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4.1)$$

որպեսզի α_k -երը դրական թվեր են՝ բավարարող

$$\sum \alpha_k = +\infty, \quad \sum \alpha_k^2 < +\infty : \quad (2.4.2)$$

պայմաններին:

Այդ դեպքում

$$x^k \rightarrow \bar{x} \in M^* :$$

Այսինքն՝ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիություն է f -ի որևէ \bar{x} մինիմումի կետի:

► Նշանակենք $v^k = f'(x^k)$: Վերցնենք որևէ $x^* \in M^*$ կետ և հաշվենք նրա հեռավորությունը $\{x^k\}$ հաջորդականության անդամներից:

Ունենք

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|x^k - x^*\|^2 + \frac{2\alpha_k}{\|v^k\|} (v^k, x^* - x^k) + \alpha_k^2 : \quad (2.4.3)$$

Քանի որ x^* -ը f -ի մինիմումի կետ է M -ի վրա, ապա

$$(v^k, x^* - x^k) \leq f(x^*) - f(x^k) \leq 0 :$$

Նաշվի առնելով այս պայմանը և (2.4.3)-ը՝ կստանանք

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^2 : \quad (2.4.4)$$

Քանի որ $\sum \alpha_k^2$ շարքը զուգամետ է, ապա (2.4.4) անհավասարությունից հետևում է, որ $\{x^k\}$ -ն սահմանափակ հաջորդականություն է: Այսպետից հետևում է, որ սահմանափակ կլինի նաև $\{v^k\}$ հաջորդականությունը: Այսինքն, գոյություն ունի $C > 0$ թիվ այնպիսին, որ

$$\|v^k\| \leq C : \quad (2.4.5)$$

Ցույց տանք, որ գոյություն ունի ինդեքսների այնպիսի $\{k_s\}$ ենթահաջորդականություն, որ

$$(v^{k_s}, x^* - x^{k_s}) \rightarrow 0, \text{ երբ } k_s \rightarrow \infty : \quad (2.4.6)$$

Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $N > 0$ թիվ, որ ինչ-որ K համարից սկսած փոքր ունի

$$(f'(x^k), x^* - x^k) < -N < 0, \forall k > K \quad (2.4.7)$$

անհավասարությունը:

Օգտվելով (2.4.3)-(2.4.7) անհավասարություններից՝ կըստանանք

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^0 - x^*\|^2 - \frac{2N}{C} \sum_{i=0}^k \alpha_i + \sum_{i=0}^k \alpha_i^2 : \quad (2.4.8)$$

Այս անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $k \rightarrow \infty$, կստանանք, որ նրա աջ մասը ձգվում է $-\infty$, իսկ ձախ մասը ոչ բացասական թիվ է, ինչը հակասություն է: Այժմ $\{x_{k_s}\}$ ենթահաջորդականության կետերի համար, կիրառելով ուռուցիկ ֆունկցիայի հիմնական անհավասարությունը, կունենանք՝

$$0 \geq f(x^*) - f(x^{k_s}) \geq (v^{k_s}, x^* - x^{k_s}) :$$

Այսպես անցնելով սահմանի, երբ $k_s \rightarrow \infty$ և հաշվի առնելով նաև (2.4.6)-ը, կստանանք

$$f(x^{k_s}) \rightarrow f(x^*) = \min_{x \in M} f(x) :$$

Քանի որ $\{x^{k_s}\}$ -ը սահմանափակ հաջորդականություն է, ապա նրանից կարելի է անջատել զուգամետ ենթահաջորդականություն: Ընդհանրությունը չխախտելով, ենթադրենք որ $x^{k_s} \rightarrow \bar{x}$: Այսպեսից, օգտվելով f -ի անընդհատությունից, կստանանք

$$f(x^{k_s}) \rightarrow f(\bar{x}) = f(x^*) = \min_{x \in M} f(x),$$

այսինքն՝ $\bar{x} \in M^*$: Ցույց տանք, որ $x^k \rightarrow \bar{x}$: Քանի որ $x^{k_s} \rightarrow \bar{x}$, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի K համար, որ երբ $k_s > K$, ապա Կետի ունի

$$\|x^{k_s} - \bar{x}\|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.4.9)$$

անհավասարությունը: Կարող ենք նաև համարել, որ ցանկացած p համարի համար Կետի ունի

$$\sum_{i=k_s}^{k_s+p-1} \alpha_i^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.4.10)$$

անհավասարությունը: Օգտվելով (2.4.3) և (2.4.9)-(2.4.10) անհավասարություններից՝ ստանում ենք, որ երբ $k_s > K$, ապա ցանկացած p բնական թվի համար փեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\|p^{k_s+p} - \bar{x}\|^2 \leq \|x^{k_s} - \bar{x}\|^2 + \sum_{i=k_s}^{k_s+p-1} \alpha_i^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Իսկ սա նշանակում է, որ

$$x^k \rightarrow \bar{x} :$$



ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ապրիլորի մեթոդով լուծել հետևյալ խնդիրները:
 Վերցնել $x^0 = (1, 1)$, $\alpha_k = 1/k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$:
 Կատարել իտերացիայի երկու քայլ:

1. $3x_1^2 + x_2^2 + 11x_2 + 3x_1 \rightarrow \min :$
2. $-2x_1^2 - x_2^2 + 8x_1 + 6x_2 - 25 \rightarrow \max :$

2.5 Գրադիենտի պրոյեկտման մեթոդը

Դիցուք $M \subseteq R^n$ -ը փակ ուռուցիկ բազմություն է: Նշանակենք $\Pi_M(a)$ -ով a վեկտորի **պրոյեկցիան** M բազմության վրա: Այսինքն՝ $\Pi_M(a)$ -ն M բազմության ամենամոտիկ կետն է a վեկտորից:

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը (փեն, օրինակ՝ [8]):

Լեմմա 2.5.1: Π_M օպերատորը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $L = 1$ հաստատունով, այսինքն՝

$$\|\Pi_M(x) - \Pi_M(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n : \quad (2.5.1)$$

Դիտարկենք մաթեմատիկական ծրագրավորման հեղուկային խնդիրը՝

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in M :$$

Այսպես $f(x)$ -ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, իսկ M -ը ուռուցիկ բազմություն է: Գրադիենտի պրոյեկցիան մեթոդով այս խնդիր լուծման համար կառուցվում է $\{x_k\}$ հաջորդականություն հեղուկային ռեկուրենս առնչությամբ.

$$x^0 \in M, \quad x^{k+1} = \Pi_M(x^k - \alpha_k f'(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots :$$

Ուսումնասիրենք այն պայմանները, որոնց դեպքում այս հաջորդականությունը կգուզամիտի f -ի որևէ մինիմումի կետի:

Լեմմա 2.5.2: Դիցուք f -ը θ հաստատունով ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիա է M ուռուցիկ բազմության վրա: Այդ դեպքում տեղի ունի հեղուկային անհավասարությունը.

$$(f'(x) - f'(y), x - y) \geq 2\theta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in M : \quad (2.5.2)$$

► ըստ f ֆունկցիայի ուժեղ ուռուցիկության (1.1.2) սահմանման՝ կամայական $x, y \in M$ կետերի համար ունենք՝

$$f(x) - f(y) \geq (f'(x), x - y) + \theta \|x - y\|^2,$$

$$f(y) - f(x) \geq (f'(y), y - x) + \theta \|x - y\|^2 :$$

Գումարելով այս երկու անհավասարությունները՝ կստանանք (2.5.2) անհավասարությունը:



Նենվելով այս արդյունքների վրա՝ ապացուցենք պրոյեկցիան մեթոդի զուգամիտության հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.5.1: *Դիցուք f -ը θ հաստատունով ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիա է M փակ ուռուցիկ բազմության վրա: Ենթադրենք նաև, որ f' գրադիենտը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին M բազմության վրա $L > 0$ հաստատունով, այսինքն*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in M :$$

Այդ դեպքում, եթե պրոյեկցիան մեթոդում որպես α_k քայլեր վերցնենք միևնույն հաստատունը $(0, \frac{4\theta}{L^2})$ միջակայքից, ապա $\{x^k\}$ հաջորդականությունը կզուգամիտվի f -ի միակ մինիմումի կետին երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:

► Դիտարկենք հետևյալ օպերատորը՝ $\mathbf{A}_\alpha : M \rightarrow M$,

$$\mathbf{A}_\alpha(x) \equiv \Pi_M(x - \alpha f'(x)) :$$

Ցույց տանք, որ այն սեղմող օպերատոր է: Օգտագործելով (2.5.1) – (2.5.2) անհավասարությունները՝ կունենանք.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_\alpha(x) - \mathbf{A}_\alpha(y)\|^2 &= \|\Pi_M(x - \alpha f'(x)) - \Pi_M(y - \alpha f'(y))\|^2 \leq \\ &\leq \|x - \alpha f'(x) - y + \alpha f'(y)\|^2 \leq \|x - y + \alpha(f'(y) - f'(x))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 + 2\alpha(x - y, f'(y) - f'(x)) + \alpha^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 = \\ &\leq \|x - y\|^2(1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 L^2) : \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Ընարենք α այսպես, որ

$$q \equiv \sqrt{1 - 4\alpha\theta + \alpha^2 L^2}$$

թիվը փոքր լինի մեկից: Եթե $\alpha \in (0, \frac{4\theta}{L^2})$, ապա $q < 1$ և հետևաբար \mathbf{A}_α օպերատորը կլինի սեղմող: Դիցուք x^* -ը նրա անշարժ կետն է M բազմության վրա, այսինքն՝

$$\Pi_M(x^* - \alpha f'(x^*)) = x^* : \quad (2.5.4)$$

Ցույց փանք, որ այդ անշարժ կետը f -ի մինիմումի կետն է: Իրոք, քանի որ պրոյեկտիան օպերատորը բավարարում է

$$(\Pi_M(a) - a, x - \Pi_M(a)) \geq 0 \quad \forall a \in R^n, \quad \forall x \in M \quad (2.5.5)$$

անհավասարությանը (տես, օրինակ՝ [8]), ապա այսպեղ փեղադրելով $a = x^* - \alpha f'(x^*)$, $\Pi_M(a) = x^*$ և հաշվի առնելով (2.5.4)-ը, կստանանք՝

$$\begin{aligned} (x^* - x^* + \alpha f'(x^*), x - x^*) &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (f'(x^*), x - x^*) &\geq 0 \quad \forall x \in M : \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Վերջապես, հաշվի առնելով նաև ուռուցիկ Փունկցիայի հիմնական անհավասարությունը, (2.5.6)-ից կունենանք

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in M,$$

այսինքն x^* -ը f -ի մինիմումի կետն է:

Բացի դրանից (2.5.3)-ից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|\mathbf{A}_\alpha x^k - \mathbf{A}_\alpha x^*\| \leq q \|x^k - x^*\| \leq \dots \\ &\leq q^{k+1} \|x^0 - x^*\| : \end{aligned}$$

Իսկ սա նշանակում է, որ $\{x^k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է x^* կետին երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ:



ԽՆԴԻՒՆԵՐ

1. Դիցուք $a \in R^n$ կամայական կետ է: Ապացուցել, որ եթե

ա) $M = \{x \in R^n / \|x - x^0\| \leq r\}$,
ապա

$$\Pi_M(a) = x^0 + \frac{a - x^0}{\|a - x^0\|} r;$$

բ) եթե $M = \{x \in R^n / b_j \leq x_j \leq c_j, j \in [1 : n]\}$,
ապա

$$(\Pi_M(a))_j = \begin{cases} b_j, & \text{եթե } a_j < b_j \\ a_j, & \text{եթե } b_j \leq a_j \leq c_j \\ c_j, & \text{եթե } a_j > c_j; \end{cases}$$

գ) եթե $M = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j \in [1 : n]\}$,
ապա

$$\Pi_M(a) = (\max(0, a_1), \dots, \max(0, a_n)) :$$

Առաջադրանք 3: Կազմել ծրագիր, որը գրադիենտի պրոյեկտիվ մեթոդով կիրականացնի

$$f(x) = 1/2(\mathbf{A}x, x) + (b, x)$$

քառակուսային ֆունկցիայի մինիմիզացիան գնդի և զուգահեռանիսպի վրա: Որպես պրոյեկտիվ մեթոդի օպերատորներ վերցնել վերևում նշված բանաձևերը: L հաստատունը վերցնել \mathbf{A} մատրիցի նորմը, ուժեղ ուռուցիկության θ հաստատունը վերցնել մատրիցի մինիմալ սեփական արժեքը, իսկ

$$\alpha_k = \frac{2\theta}{L^2} :$$

Կանգառի քայլ համարել $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_0$ պայմանը, որպեսզի $\varepsilon_0 > 0$ նախապես փոքր ճշգրտություն է:

Գլուխ 3

Ուռուցիկ անալիզ

Ուռուցիկ անալիզը մաթեմատիկական անալիզի բաժին է, որն ուսումնասիրում է ուռուցիկ բազմությունների և ուռուցիկ ֆունկցիաների հատկությունները:

Ուռուցիկ անալիզի գաղափարները և փաստերը ֆունդամենտալ նշանակություն ունեն օպտիմիզացիայի թվային մեթոդների տեսությունում: Դրանք լայն կիրառություններ ունեն նաև կիրառական մաթեմատիկայի այնպիսի բնագավառներում ինչպիսիք են՝ խաղերի տեսությունը, գործույթների հեքագոփումը, մաթեմատիկական էկոնոմիկան և այլն:

Այս գլուխը կարելի է դիտարկել որպես ուռուցիկ անալիզի ներածություն: Այսպեղ բերված փաստերը և պնդումները օգտագործվում են հեքագայում մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներում Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը հիմնավորելու համար: Նշենք, որ կան նաև լրացուցիչ փաստեր, որոնք ձևակերպված են խնդիրների տեսքով:

Նարկ ենք համարում նշել, որ ուռուցիկ անալիզի ժամանակակից մեթոդներին կարելի է ծանոթանալ [5, 7, 11] աշխատանքներում:

3.1 Ուռուցիկ բազմությունների անջատման թեորեմները

Սահմանում 3.1.1: Դիցուք $p \in R^n$ -ն n -րդ կարգի վեկտոր է, իսկ α -ն իրական թիվ է:

$$H = \{x \in R^n / (p, x) = \alpha\}$$

բազմությունը կոչվում է հիպերհարթություն, իսկ

$$H_+ = \{x \in R^n / (p, x) \geq \alpha\}, \quad H_- = \{x \in R^n / (p, x) \leq \alpha\}$$

բազմությունները՝ այդ հիպերհարթությանը ծնված կիսաբաց թափանցանքներ:

Սահմանում 3.1.2: $M_1, M_2 \subseteq R^n$ բազմությունները կոչվում են **անջատվող հիպերհարթությամբ**, եթե գոյություն ունի այնպիսի $p \neq 0$ վեկտոր, որ

$$(p, x) \leq (p, y) \quad \forall x \in M_1, \quad \forall y \in M_2 :$$

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի H հիպերհարթություն, որ

$$M_1 \subseteq H_-, \quad M_2 \subseteq H_+ :$$

Թեորեմ 3.1.1: Դիցուք $M_1, M_2 \subseteq R^n$ այնպիսի ուռուցիկ բազմություններ են, որ $M_1 \cap M_2 = \emptyset$: Այդ դեպքում նրանք անջատվում են հիպերհարթությամբ:



Թեորեմի ապացույցը հենվում է հետևյալ երկու պնդումների վրա:

Լեմմա 3.1.1: *Եթե M -ը փակ ուռուցիկ բազմություն է և $a \notin M$, ապա այդ կետը հիպերհարթությամբ անջատվում է M բազմությունից:*



Գրենք a կետի պրոեկցիան M բազմության վրա: Ցույց փանք, որ այն գոյություն ունի և միակն է: Վերցնենք a կենտրոնով և $r \equiv \inf_{x \in M} \|a - x\| + \varepsilon$ շառավղով $B_r(a)$ գունդը, որպեսզի $\varepsilon > 0$ ֆիքսաժ թիվ է: Քանի, որ գունդը փակ սահմանափակ բազմությունն է, ապա $M \cap B_r(a)$ հատումը կոմպակտ է: Ներկայացնենք, a կետի հեռավորությունը այդ հատումից հասանելի է: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ կետը ամենամոտիկն է նաև M բազմությունից, այսինքն դա $\Pi_M(a)$ կետն է: Ցույց փանք $\Pi_M(a)$ -ի միակությունը: Ենթադրենք գոյություն ունի երկու ամենամոտիկ կետ: Դիցուք դրանք b, c կետերն են: Եթե a, b, c կետերը եռանկյուն են կազմում, ապա այն հավասարասրուն է, որի սրունքը հավասար է $d \equiv \inf_{x \in M} \|x - a\|$, իսկ հիմքը $[c, b]$ հարվածն է: Քանի, որ M ուռուցիկ է, ապա $[c, b] \in M$: Ներկայացնենք a զազաթից փարած բարձրության հիմքը $[c, b]$ հարվածի միջնակետն է: Քանի որ բարձրությունը փոքր է սրունքից և սրունքը մինիմալ հեռավորությունն է, ապա սրացանք հակասություն: Նշենք նաև a, b, c կետերը միևնույն գծի վրա գտնվել չեն կարող, քանի որ $a \notin M$: Այժմ $[\Pi_M(a), a]$ հարվածի g միջնակետով փանենք հիպերհարթություն, որի նորմալը $a - \Pi_M(a)$ վեկտորն է: Ցույց փանք, որ այդ հիպերհարթությունը անջատում է a կետը M բազմությունից: Դիցուք H_+ այն կիսափարածությունն է, որը պարունակում է a կետը, իսկ H_-

կիսափարածությունը չի պարունակում a -ն: Ցույց փանք, որ

$$M \subset H_- :$$

Նախ պարզ է, որ g կեփի պրոեկցիան M բազմության վրա $\Pi_M(a)$ կեփն է: Ենթադրենք, որ գոյություն ունի $e \in M \cap H_- :$ Այդ դեպքում $g, \Pi_M(a), e$ գազաթներով եռանկյան մեջ g գազաթից փարված բարձրության հիմքը կպարկանա $[\Pi_M(a), e] \subseteq M$ հարվածին և այդ բարձրությունը փոքր է $[g, \Pi_M(a)]$ հարվածի երկարությունից, որը հակասություն է, քանի որ այն g կեփի մինիմալ հեռավորությունն է M բազմությունից:



Լեմմա 3.1.2: *Դիցուք M ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $a \notin M$: Այդ դեպքում a կեփը հիպերհարթությամբ անջատվում է M բազմությունից:*

► Եթե $a \notin \overline{M}$, ապա հանգում ենք նախորդ դեպքին, քանի որ այս դեպքում a կեփը կարելի է հիպերհարթությամբ անջատել \overline{M} բազմությունից հեփնաբար՝ M բազմությունից:

Այժմ ենթադրենք, որ a -ն M -ի եզրային կեփ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $\{x^k\} \notin \overline{M}$ հաջորդականություն, որ $x^k \rightarrow a$: Նամաձայն լեմմա 3.1.1-ի յուրաքանչյուր x^k կեփ կարելի է անջատել M բազմությունից հիպերհարթությամբ: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի p^k միավոր վեկտորներ, որ

$$(p^k, x) \leq (p^k, x^k) \quad \forall x \in M :$$

Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ $p^k \rightarrow p^0 \neq 0$: Անցնելով սահմանի՝ կսփանանք

$$(p^0, x) \leq (p^0, a) \quad \forall x \in M,$$

ինչը նշանակում է a կերի և M բազմության անջատում հիպերհարթությամբ:



Այժմ անցնենք թեորեմի ապացույցին: Նշանակենք $M \equiv \equiv M_1 - M_2$: M -ը ուռուցիկ է և քանի որ $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, ապա $0 \notin M$: Տամաձայն լեմմա 3.1.2-ի՝ 0 կերը կարելի է անջատել M բազմությունից: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի $p \neq 0$ վեկտոր, որ

$$(p, x - y) \leq 0 \quad \forall x \in M_1, \forall y \in M_2 :$$

Այսպեղից,

$$(p, x) \leq (p, y) \quad \forall x \in M_1, \forall y \in M_2 :$$



Նեպրևանք 3.1.1: Դիցուք $M \subseteq R^n$ -ը ուռուցիկ բազմություն է, իսկ a -ն նրա եզրային կետը: Այդ դեպքում a կետով կարելի է տանել այնպիսի հիպերհարթություն, որ M բազմությունը ընկած լինի այդ հիպերհարթությամբ ծնված կիսատարածություններից որևէ մեկում:

Այդպիսի հիպերհարթությունը կոչվում է **հեռնասն** հիպերհարթություն:

Սահմանում 3.1.3: Դիցուք M_1 և $M_2 \subseteq R^n$: Կասենք, որ այդ բազմությունները **խիստ** են անջատվում հիպերհարթությամբ, եթե գոյություն ունեն այնպիսի p վեկտոր և $\varepsilon > 0$ թիվ, որ

$$(p, x) \leq (p, y) - \varepsilon \quad \forall x \in M_1, \forall y \in M_2 :$$

Ներագա դասախոսությունների որոշ թեորեմների, մասնավորապես Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդի, հիմնավոր շարադրման համար կարևոր է հեպրեյալ պնդումը, որը բերում ենք առանց ապացույցի (տես, օրինակ՝ [7-8]):

Թեորեմ 3.1.2: *Դիցուք $M_1 \subset R^n$ փակ ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $M_2 \subset R^n$ ուռուցիկ կոնվալսկր է և*

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset :$$

Այդ դեպքում այս բազմությունները խիստ անջատվում են հիպերհարթությամբ:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գրել այն հիպերհարթության հավասարումը, որն անջատում է $(-1, 2, 1, -3)$ կետը $M \subseteq R^4$ բազմությունից, որը փրվում է անհավասարությունների հեփևյալ համակարգով.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 \leq 1, \\ -3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \leq 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 9 : \end{cases}$$

2. Ապացուցել հեփևյալ պնդումը: Որպեսզի $M \subseteq R^n$ փակ բազմությունը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $b \notin M$ կետ խիստ անջատվի հիպերհարթությամբ M բազմությունից:
3. Դիցուք ուռուցիկ բազմության փրված կետով կարելի է փանել երկու հենման հիպերհարթություն: Ապացուցել, որ այդ կետով անցնում են անթիվ բազմության հենման հիպերհարթություններ:

4. Դիցուք $M_1, M_2 \subset R^n$ այնպիսի ուռուցիկ բազմություններ են, որ

$$\text{int}M_2 \neq \emptyset \text{ և } M_1 \cap \text{int}M_2 = \emptyset :$$

Ապացուցել, որ M_1 և M_2 բազմությունները անջատվում են հիպերհարթությամբ:

3.2 Կարաթեոդորի թեորեմը

Սահմանում 3.2.1: Դիցուք M -ը R^n -ի ենթաբազմություն է: Այդ բազմության **ուռուցիկ թաղանթ** կոչվում է հետևյալ բազմությունը.

$$\text{conv}M \equiv \left\{ y \in R^n / y = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i, x^i \in M, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i \in [1 : k], k = 1, 2, \dots \right\} :$$

Լեմմա 3.2.1: Դիցուք n զրոյական $x \in R^n$ վեկորորը ներկայացվում է $X = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ համախմբի վեկորորների գծային n բացասական կոմբինացիայով (գծային կոմբինացիայի գործակիցները n բացասական թվեր են): Այդ դեպքում x -ը ներկայացվում է նաև այդ համակարգի գծորեն անկախ մի ենթահամակարգի վեկորորների գծային n բացասական կոմբինացիայի միջոցով:

► Դիցուք

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i, \alpha_i \geq 0, i \in [1 : m] :$$

Եթե X համախմբի վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա պնդումն ապացուցված է: Դիցուք այժմ X համախմբի վեկտորները գծորեն կախված են: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i :$$

Կարող ենք ենթադրել, որ այդ գործակիցներից որևէ մեկը դրական է: Նշանակենք

$$\alpha_0 \equiv \min_{\lambda_i > 0} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} = \frac{\alpha_s}{\lambda_s} :$$

Ունենք՝

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i - \alpha_0 \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_0 \lambda_i) x^i :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\alpha_s - \alpha_0 \lambda_s = 0 \text{ և } \alpha_i - \alpha_0 \lambda_i \geq 0 \ \forall i :$$

Այսպեղից հետևում է, որ x վեկտորը ներկացվում է X -ի ինչ-որ վեկտորների ոչ բացասական կոմբինացիայով, որոնց քանակը փոքր է m -ից: Այսպես շարունակելով՝ կհանգենք գծորեն անկախ համակարգի:



Թեորեմ 3.2.1: Դիցուք $x \in R^n$ վեկտորը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով.

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \ \lambda_i \geq 0, \ i \in [1 : m], \ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \ m > n : \tag{3.2.1}$$

Այդ դեպքում $X = \{x^1, \dots, x^m\}$ համախմբի մեջ գոյություն ունի այնպիսի մի $\{x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_{n+1}}\}$ ենթահամախմբումը և ոչ բացասական $\alpha_{i_1} \geq 0, \alpha_{i_2} \geq 0, \dots, \alpha_{i_{n+1}} \geq 0$ թվեր, որ $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i_j} = 1$ և

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i_j} x^{i_j} :$$

► Դիփարկենք $(x, 1) \in R^{n+1}$ վեկտորը: Ըստ (3.2.1)-ի՝ ունենք

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x^i, 1) :$$

Նամաձայն **լեմմա 3.2.1-ի՝** գոյություն ունեն վեկտորների գծորեն անկախ այնպիսի $\{x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k}\}$ համախումբ և ոչ բացասական թվեր $\alpha_{i_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_k}$, որ

$$(x, 1) = \sum_{j=1}^k \alpha_{i_j} (x^{i_j}, 1) :$$

Այսինքն՝

$$x = \sum_{j=1}^k \alpha_{i_j} x^{i_j}, \quad \alpha_{i_1} \geq 0, \alpha_{i_2} \geq 0, \dots, \alpha_{i_k} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^k \alpha_{i_j} = 1 : \quad (3.2.2)$$

Բայց, քանի որ $n + 1$ չափանի փարածությունում գծորեն անկախ համակարգի վեկտորների քանակը $n + 1$ -ից ավել չէ, ապա $k \leq n + 1$: Եթե $k = n + 1$, ապա թեորեմն ապացուցված է: Եթե $k < n + 1$, ապա ավելացնելով գրոյական անդամներ (3.2.2) գումարի անդամների քանակը դարձնում ենք $n + 1$:



Նեփուանք 3.2.1 (Կարարաթեոդորի թեորեմ): Դիցուք M -ը R^n -ի ենթաբազմություն է: Այդ դեպքում՝

$$\text{conv}M = \{y \in R^n / y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x^i, x^i \in M,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i \in [1 : n + 1]\} :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գտնել հետևյալ բազմությունների ուռուցիկ թաղանթները:

ա) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 x_2 = 1\};$

բ) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_2 = \exp(-x_1)\};$

գ) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1, x_2 \in [0, 1]\} \cup \{(x_1, x_2) \in R^2 / x_2 = x_1\} :$

2. Ապացուցել, որ բաց բազմության ուռուցիկ թաղանթը բաց բազմություն է:

3. Ապացուցել, որ կոմպակտ բազմության ուռուցիկ թաղանթը կոմպակտ է:

4. Անջատվում է արդյոք $(1, -1, 0)$ կետը

$$M = \text{conv}\{(-1, 1, 2), (2, -1, -3), \\ (-2, 3, -1), (-5, -1, 3)\}$$

բազմությունից հիպերհարթությամբ:

5. Ապացուցել, որ $\text{conv}M$ -ը մինիմալ այն ուռուցիկ բազմությունն է, որը պարունակում է M -ը:
6. Ապացուցել հեպլայալ պնդումը: Որպեսզի $M \subseteq R^n$ բազմությունը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\text{conv}M = M :$$

7. Դիցուք $M = \text{conv}\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$, իսկ $f(x)$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է, որոշված M բազմության վրա: Ապացուցել, որ

$$\max_{x \in M} f(x) = \max_{i \in [1:m]} f(x^i) :$$

Ցուցում: Օգտվել Յենսենի անհավասարությունից:

8. Գտնել $f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը հեպլայալ բազմության վրա.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, & x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, & x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} :$$

3.3 Նեղի թեորեմը

Թեորեմ 3.3.1 (Ռադոն): Դիցուք տրված է վեկտորների $X = \{x^1, x^2, \dots, x^k\}$ ($k \geq n + 2$) համախումբը R^n -ում: Այդ դեպքում այդ բազմությունը կարելի է տրոհել երկու ենթաբազմությունների՝ Y և Z այնպիսին, որ

$$\text{conv}Y \cap \text{conv}Z \neq \emptyset :$$

► Դիֆարկենք վեկտորների

$$\{x^2 - x^1, x^3 - x^1, \dots, x^k - x^1\}$$

համախումբը: Քանի որ այս բազմության վեկտորների քանակը մեծ կամ հավասար է $n + 1$, ապա նրանք գծորեն կախված են: Ներկայացնելով, գոյություն ունեն $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի այնպիսին, որ

$$\sum_{i=2}^k (x^i - x^1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i = 0, \text{ որպեսզ } \alpha_1 = - \sum_{i=2}^k \alpha_i :$$

Այսպիսով, գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ գործակիցներ, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի այնպիսին, որ

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x^i = 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 : \quad (3.3.1)$$

Այն α_i գործակիցները, որոնք հավասար են զրոյի դեմ գցենք և ընդհանրությունը չիսխարելով ենթադրենք, որ

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_{k'} > 0, \alpha_{k'+1} < 0, \dots, \alpha_k < 0 :$$

Նշանակենք

$$\nu = \sum_{i=1}^k \alpha_i = - \sum_{i=k'+1}^k \alpha_i :$$

(3.3.1)-ից կստանանք

$$\sum_{i=1}^{k'} \frac{\alpha_i}{\nu} x^i = \sum_{i=k'+1}^k -\frac{\alpha_i}{\nu} x^i : \quad (3.3.2)$$

Նշանակելով

$$Y = \{x^1, \dots, x^{k'}\}, \quad Z = \{x^{k'+1}, \dots, x^k\}$$

(3.3.2)-ից կստանանք

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k'} \frac{\alpha_i}{\nu} x^i = \sum_{i=k'+1}^k -\frac{\alpha_i}{\nu} x^i \in \text{conv}X \cap \text{conv}Y :$$



Թեորեմ 3.3.2 (Նեյման): Եթե $\{A_\alpha\}$ -ն R^n տարածության կոնվեքս կոմպակտ ուռուցիկ ենթատարածությունների այնպիսի ընդհանր է, որ նրա ցանկացած $n + 1$ քանակով բազմությունների հատումը դատարկ չէ, ապա

$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha \neq \emptyset :$$

► Քանի, որ A_α բազմությունները կոնվեքս են, ապա բավական է ցույց տալ, որ այդ ընդհանրից ցանկացած վերջավոր քանակով բազմությունների հատումը դատարկ չէ: Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայով՝ ըստ բազմությունների քանակի: Դիցուք A_1, A_2, \dots, A_k ($k > n+1$) բազմություններ են ընդհանրից և այդ բազմություններից ցանկացած $k - 1$ -ի հատումը դատարկ չէ: Ապացուցենք, որ

$$\bigcap_{i=1}^k A_i \neq \emptyset :$$

Նշանակենք

$$D_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \dots \cap A_k, \quad i \in [1 : k] : \quad (3.3.3)$$

Ըստ ենթադրության՝ D_i , $i \in [1 : k]$ բազմությունները դադարկ չեն: Ընտրենք կամայական $x^i \in D_i$ էլեմենտներ և ձևավորենք $X = \{x^1, x^2, \dots, x^k\}$ համախումբը: Ըստ **Ռ-ադոնի թեորեմի**՝ այդ համախումբը կարելի է փրոհել այնպիսի երկու մասերի, որ $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ և

$$\text{conv}Y \cap \text{conv}Z \neq \emptyset :$$

Ենթադրենք

$$Y = \{x^1, x^2, \dots, x^{k'}\}, Z = \{x^{k'+1}, \dots, x^k\} :$$

Ցույց փանք, որ եթե

$$x \in \text{conv}Y \cap \text{conv}Z,$$

ապա

$$x \in \bigcap_{i=1}^k A_i :$$

Ունենք

$$x = \sum_{i=1}^{k'} \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^{k'} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \in [1 : k'] :$$

Այսպեղից, քանի որ

$$x^i \in \bigcap_{j=k'+1}^k A_j, \quad \forall i \leq k'$$

և A_j , $j \in [1 : k]$ բազմությունները ուռուցիկ են, ապա

$$x \in \bigcap_{j=k'+1}^k A_j :$$

Մյուս կողմից, քանի որ

$$x = \sum_{j=k'+1}^k \lambda_j x^j,$$

ապա

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k'} A_j :$$

Այսպիսով,

$$x \in \bigcap_{j=1}^k A_j :$$



ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք R^2 հարթության n հատ կետեր բավարարում են հետևյալ պայմանին. նրանցից ցանկացած երեքը գտնվում են միավոր շառավղով ինչ-որ շրջանի ներսում: Ապացուցել, որ բոլոր կետերն են գտնվում միավոր շառավղով միևնույն շրջանի ներսում:
Ցուցում: Դիցուք a^1, a^2, \dots, a^n -ը տրված կետերն են: Դիտարկել

$$A_i = \{x \in R^2 / \|x - a^i\| \leq 1\}, \quad i \in [1 : n]$$

շրջանների բազմությունը և այդ ընդամենի նկատմամբ կիրառել Նեյլիի թեորեմը:

2. Դիցուք $M \subset R^n$ ուռուցիկ կոնպակտ բազմությունը ծածկված է բաց կիսափարածությունների ընդհանրով: Ապացուցել, որ այդ ընդհանրից կարելի է ընտրել $n + 1$ հար կիսափարածություններ, որոնք նույնպես ծածկում են M -ը:
3. Դիցուք $M \subset R^2$ -ը d փրամագծով կոնպակտ բազմություն է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $d/\sqrt{3}$ շառավղով շրջան, որը պարունակում է M -ը:
Ֆուգում: Նախ ցույց տալ, որ այդ բազմության ցանկացած երեք կետերի համար գոյություն ունի $d/\sqrt{3}$ շառավղով շրջան, որը պարունակում է այդ կետերը: Այնուհետև այդ շրջանների նկատմամբ կիրառել Նեյմանի թեորեմը:

Նշենք, որ Նեյմանի թեորեմի բազմաթիվ կիրառություններին կարելի է ծանոթանալ [9]-ում:

3.4 Ուռուցիկ ֆունկցիայի սուբդիֆերենցիալը

Սահմանում 3.4.1: Դիցուք f -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է որոշված R^n -ի վրա: v վեկտորը կոչվում է սուբգրադիենտ x^0 կետում, եթե տեղի ունի

$$f(x) - f(x^0) \geq (v, x - x^0) \quad \forall x \in R^n \quad (3.4.1)$$

անհավասարությունը:

f -ի սուբգրադիենտների բազմությունը x^0 կետում կոչվում է **սուբդիֆերենցիալ** և նշանակվում է $\partial f(x^0)$ սիմվոլով:

Թեորեմ 3.4.1: $\partial f(x^0)$ բազմությունը ոչ դափարկ ուռուցիկ կոնվաքս է:

► Նախ ցույց փանք $\partial f(x^0)$ -ի ուռուցիկությունը:
 Եթե $v^1 \in \partial f(x^0)$, $v^2 \in \partial f(x^0)$, ապա

$$f(x) - f(x^0) \geq (\alpha v^1 + (1 - \alpha)v^2, x - x^0) \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

որպեղից հեփևում է $\partial f(x^0)$ -ի ուռուցիկությունը:

$\partial f(x^0)$ բազմության փակությունը ակնհայտ է: Ապացուցենք, որ այն դափարկ է: Դիփարկենք f Ֆունկցիայի վերգրաֆիլը՝

$$\text{epi}(f) = \{(\beta, x) \in R^{n+1} / \beta \geq f(x)\} :$$

Քանի որ այս բազմությունը փակ է և ուռուցիկ, ապա նրա եզրային $(f(x^0), x^0)$ կեփից կարելի է փանել հենման հիպերհարթություն: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի ոչ գրոյական $(c, v) \in R^{n+1}$ վեկտոր, որ

$$c\beta + (v, x) \geq cf(x^0) + (v, x^0) \quad \forall (\beta, x) \in \text{epi}(f) : \quad (3.4.2)$$

Եթե $c = 0$, ապա (3.4.2)-ից սփանում ենք

$$(v, x - x^0) \geq 0 \quad \forall x \in R^n :$$

անհավասարությունը: Այսփեղից հեփևում է, որ $v = 0$, որը հակասություն է, քանի որ $(c, v) \neq 0$: Ցույց փանք, որ $c > 0$: (3.4.2) անհավասարությունը $x = x^0$ դեպքում ունի

$$c(\beta - f(x^0)) \geq 0$$

փեսքը, որպեղից անմիջականորեն հեփևում է, որ $c > 0$: Այժմ (3.4.2) անհավասարության երկու մասերը բաժանենք $c > 0$ թվի վրա և այնուհեփև փեղադրելով $\beta = f(x)$ կսփանանք

$$f(x) - f(x^0) \geq \left(-\frac{v}{c}, x - x^0\right),$$

որպեսզից հետևում է, որ

$$-\frac{v}{c} \in \partial f(x^0) :$$

Ապացուցենք, որ $\partial f(x^0)$ բազմությունը սահմանափակ է: Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում գոյություն կունենա այնպիսի $\{v^k\}$ ($v^k \in \partial f(x^0)$) հաջորդականություն, որ $\|v^k\| \rightarrow \infty$: (3.4.1) անհավասարությունում փեղադրելով $x = x^0 + v^k/\|v^k\|$, կստանանք

$$f(x) - f(x^0) \geq \|v^k\| : \quad (3.4.3)$$

Քանի որ f -ը անընդհատ է, ապա (3.4.3) անհավասարության ձախ մասը սահմանափակ է, իսկ աջ մասը ձգարում է անվերջության, երբ $k \rightarrow \infty$, ինչը հակասություն է:



Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի ալգորիթմների մշակման համար կարևոր է նկարագրել և հաշվել ֆունկցիայի նվազման ուղղությունները յուրաքանչյուր կետում: Դիֆերենցելիության դեպքում այդ հարցը մեխանիկորեն լուծվում է՝ նվազման ուղղությունը հակազդադիենտի ուղղությունն է: Սակայն երբ ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ այդ խնդիրը բարդ է: Բայց ուռուցիկ որոշ դասի ֆունկցիաների համար սուբգրադիենտի օգնությամբ հնարավոր է նկարագրել ֆունկցիաների նվազման ուղղությունները և կառուցել մինիմիզացիայի ալգորիթմներ: Ստորև բերված պնդումները նկարագրում են այդ ֆունկցիաները և նրանց նվազման ուղղությունները: Ճիշտ են հետևյալ պնդումները (տես, օրինակ՝ [4, 7]):

Թեորեմ 3.4.2: Դիցուք $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ դիֆերենցելի ուռուցիկ ֆունկցիաներ են: Նշանակենք

$$f(x) \equiv \max_{i \in [1:k]} f_i(x) :$$

Այդ դեպքում

$$\partial f(x) = \text{conv}\{f'_i(x), i \in I(x)\},$$

$$\text{որտեղ } I(x) = \{i \in [1 : k] / f_i(x) = f(x)\} :$$

Թեորեմ 3.4.3: Դիցուք *տեղի ունեն թեորեմ 3.4.2-ի պայմանները* և

$$0 \notin \partial f(x) :$$

Այդ դեպքում

$$h = -\frac{\Pi_{\partial f(x)}(0)}{\|\Pi_{\partial f(x)}(0)\|}$$

վեկորորը f ֆունկցիայի նվազման ուղղությունն է x կետում:

Վերը նշված թեորեմները հնարավորություն են տալիս ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով որոշ դեպքերում գտնելու ուռուցիկ ոչ դիֆերենցելի ֆունկցիայի մինիմումի կետերը: Մեկնաբանենք դա օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Դիցուք

$$f(x_1, x_2) \equiv \max_{i \in [1:3]} f_i(x_1, x_2),$$

որտեղ

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2,$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 3 :$$

Պետք է գտնել f -ի մինիմումի կետը R^2 -ի վրա: Որպես սկզբնական մոտավորություն վերցնենք $x^0 = (0, 0)$ կետը: Թանի որ

$$f_1(x^0) = f_2(x^0) = 0, f_3(x^0) = -3,$$

այս $I(x^0) = \{1, 2\}$ և հետևաբար, ըստ **թեորեմ 3.4.2-ի**, կունենանք՝

$$\partial f(x^0) = \text{conv}\{f'_1(0, 0), f'_2(0, 0)\} = \text{conv}\{(2, 1), (-1, -2)\}.$$

Պարզ է, որ

$$0 \notin \partial f(x^0),$$

ուստի ըստ **թեորեմ 3.4.3-ի**՝

$$h^0 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

վերադառնալով կլինի f -ի նվազման ուղղությունը x^0 կետում: Այժմ ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով գտնենք α_0 քայլի երկարությունը և կառուցենք x^1 կետը հետևյալ բանաձևով.

$$x^1 = x^0 + \alpha_0 h^0 :$$

Ունենք

$$\begin{aligned} g(\alpha) &\equiv f(x^0 + \alpha h^0) = \max\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha, -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha, \sqrt{\alpha} - 3\right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \max\{-\alpha, 2\alpha - 3\sqrt{2}\} : \end{aligned}$$

Այսպեսով

$$\alpha_0 = \arg \min_{\alpha \in (0, +\infty)} f(x^0 + \alpha h^0) = \sqrt{2} :$$

Ներկայացնենք, $x^1 = x^0 + \alpha_0 h^0 = (-1, 1)$:

Քանի որ

$$f_1(x^1) = f_2(x^1) = f_3(x^1) = -1,$$

այսինքն $I(x^1) = \{1, 2, 3\}$: Ներկայացնենք,

$$\begin{aligned} \partial f(x^1) &= \text{conv}\{f'_1(x^1), f'_2(x^1), f'_3(x^1)\} = \\ &= \text{conv}\{(2, 1) \ (-1, -2) \ (-1, -1)\} : \end{aligned}$$

Նշենք ϵ նկատելի, որ $0 \in \partial f(x^1)$: Այսպեսով ϵ հեռավորում է, որ x^1 վեկտորը f ուռուցիկ ֆունկցիայի մինիմումի կերպ է:

Ինչպես երևում է **թեորեմ 3.4.3-ից** ուռուցիկ ֆունկցիայի նվազման ուղղությունները գտնելու համար կարևոր խնդիր է որոշել 0 կերպի պրոյեկցիան ուռուցիկ կոնվեքսի վրա: Նկարագրենք մի իրերացիոն ալգորիթմ, որի միջոցով ցանկացած ճշգրտությամբ կարելի է գտնել 0 կերպի պրոյեկցիան ուռուցիկ բազմանիստի վրա: Դիցուք փրկած է n չափանի վեկտորների $X = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ համախումբը: Պետք է գտնել 0 կերպի պրոյեկցիան $M = \text{conv} X$ բազմության վրա, այսինքն՝ $\Pi_M(0)$ -ն:

Կառուցում ենք $\{v^k\}$ հաջորդականությունը հետևյալ կերպ.

- Որպես v^0 սկզբնական մոֆավորություն վերցնում ենք այն վեկտորը X համախումբից, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$(v^0, v^0) = \min_{i \in [1:m]} (x^i, x^i) :$$

- Ենթադրենք արդեն ունենք $v^k \in M$ վեկտորը: Նկարագրենք v^{k+1} կառուցման ալգորիթմը: Ընտրում

ենք X համախմբից այն \bar{x}^k վեկտորը, որը բավարարում է

$$(\bar{x}^k, v^k) = \min_{i \in [1:m]} (v^k, x^i) :$$

հավասարությանը:

Այնուհետև հաշվում ենք

$$\delta(v^k) \equiv (v^k - \bar{x}^k, v^k), \quad t_k = \frac{\delta(v^k)}{\|\bar{x}^k - v^k\|}$$

անծությունները:

- v^{k+1} վեկտորը կառուցում ենք հետևյալ ռեկուրենս առնչությամբ.

$$v^{k+1} = v^k + t_k(\bar{x}^k - v^k) :$$

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը, որը բերում ենք առանց ապացույցի (տե՛ս, օրինակ՝ [4]):

Թեորեմ 3.4.4: *Դիցուք $\{v^k\}$ հաջորդականությունը կառուցվել է վերը նշված ալգորիթմով:*

Այդ դեպքում $v^k \rightarrow \Pi_M(0)$, երբ $k \rightarrow \infty$:

Առաջադրանք 4: Կատարել վերը նշված ալգորիթմի ծրագրային իրականացումը C^{++} լեզվով:

Գտնել $\Pi_M(0)$ վեկտորը, եթե

$$M = \text{conv}\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 1.5, 1), (2, 3, 4)\} :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք f ուռուցիկ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x^0 կետում: Ապացուցել, որ

$$\partial f(x^0) = \{f'(x^0)\} :$$

2. Դիցուք $f(x) = \|x\|$: Ցույց տալ, որ

$$\partial f(0) = B_1(0) :$$

3. Նաշվել հետևյալ ուռուցիկ ֆունկցիաների սուբդիֆերենցիալները:

ա) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$,

բ) $f(x) = \max\{4x + 1, x - 2\}$,

գ) $f(x_1, x_2) = |x_1 - 1/2|x_2| + x_2|$,

դ) $f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$,

ե) $f(x_1, x_2) = ||x_1| + x_2 - 1|$:

4. Ապացուցել հետևյալ պնդումը: Որպեսզի x^0 կետը լինի f ուռուցիկ ֆունկցիայի մինիմումի կետ R^n -ի վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$0 \in \partial f(x^0) :$$

5. c պարամետրերի բոլոր արժեքների դեպքում լուծել հետևյալ խնդիրները.

$$\text{ա) } \|x\| - (c, x) \rightarrow \min, \quad x \geq 0, \quad x \in R^n,$$

$$\text{բ) } \frac{1}{2}\|x\|^2 + \|x - c\| \rightarrow \min, \quad x \in R^n,$$

$$6. \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 - 2| \rightarrow \min :$$

Լուծում: Որպեսզի (x_1, x_2) կետը լինի f -ի մինիմումի կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի $v \in \partial g(x_1, x_2)$ վեկտոր, որ

$$0 \in \partial f(x_1, x_2) \Leftrightarrow (2x_1 + x_2, 2x_2 + x_1) + 3v = 0, \quad (3.4.3)$$

որտեղ $g(x_1, x_2) \equiv |x_1 + x_2 - 2|$: Դժվար չէ պետանել, որ

$$\partial g(x_1, x_2) = \begin{cases} (1, 1), & \text{երբ } x_1 + x_2 > 2 \\ (-1, -1), & \text{երբ } x_1 + x_2 < 2 \\ \text{conv}\{(1, 1), (-1, -1)\}, & \text{երբ } x_1 + x_2 = 2 : \end{cases}$$

Եթե $x_1 + x_2 > 2$, ապա (3.4.3) պայմանից կստանանք

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3 = 0, \\ 2x_2 + x_1 + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -2,$$

այսինքն համակարգը համարելի չէ:

Եթե $x_1 + x_2 < 2$, ապա համակարգը նույնպես լուծում չունի:

Եթե $x_1 + x_2 = 2$,

ապա

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3\alpha = 0, \\ 2x_2 + x_1 + 3\alpha = 0, \\ \alpha \in [-1, 1], \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1, x_1 = x_2 = 1 :$$

այսինքն $(1, 1)$ կետը խնդրի լուծումն է:

$$7. \quad x_1^2 + x_2^2 + 2\max(x_1, x_2) \rightarrow \min :$$

$$8. x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2} \rightarrow \min :$$

$$9. x_1^2 + x_2^2 + 4|x_1 + x_2 - 1| \rightarrow \min :$$

10. Ամենաարագ վայրէջքի մեթոդով գտնել

$$f(x_1, x_2) \equiv \max_{i \in [1:3]} f_i(x_1, x_2)$$

Ֆունկցիայի մինիմումի կետը: Կապարել իրերացիայի երկու քայլ: Այսպես

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = -x_1 - x_2,$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 5 :$$

3.5 Կուն-Տակկերի թեորեմը

Դիցուք $f_i(x)$, $i \in [0 : m]$, Ֆունկցիաները ուռուցիկ են R^n -ի վրա: Դիպարկենք $f_0(x)$ Ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդիրը $M \equiv \{x \in R^n / f_i(x) \leq 0, i \in [1 : m]\}$ բազմության վրա.

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in M : \quad (3.5.1)$$

Նեշտ է ցույց տալ, որ M -ը ուռուցիկ բազմություն է:

(3.5.1) խնդիրը կոչվում է **ուռուցիկ ծրագրավորման** խնդիր: $f_0(x)$ Ֆունկցիայի մինիմումի կետերը M բազմության վրա կոչվում են (3.5.1) խնդրի լուծումներ: Կազմենք **Լագրանժի** Ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x),$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1} :$

Թեորեմ 3.5.1 (Կուն-Տակեր: Անհրաժեշտությունը):
 Դիցուք x^* կետը հասնդիսանում է (3.5.1) խնդրի լուծում:
 Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$
 թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ

$$1) L(x, \lambda) \geq L(x^*, \lambda) \quad \forall x \in R^n,$$

$$2) \lambda_i f_i(x^*) = 0, \quad i \in [1 : m]:$$

► Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ $f_0(x^*) = 0$: Նակառակ դեպքում կդիփարկենք $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(x^*)$ ֆունկցիան, որը նույնպես ուռուցիկ է և $\tilde{f}_0(x^*) = 0$: Դիփարկենք հետևյալ բազմությունը.

$$C = \{(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in R^{m+1} / \exists x \in R^n :$$

$$f_0(x) < \mu_0, \quad f_i(x) \leq \mu_i, \quad i \in [1 : m]\} :$$

Այս բազմությունը ուռուցիկ է: Այն անմիջապես հետևում է սահմանումից: C -ն դափարկ չէ: Իսկապես, քանի որ

$$f_0(x^*) < 1, \quad f_i(x^*) \leq 1, \quad i \in [1 : m],$$

ապա

$$(1, 1, \dots, 1) \in C :$$

Ակնհայտ է նաև, որ $0 \notin C$, քանի որ հակառակ դեպքում գոյություն կունենար այնպիսի x կետ, որ

$$f_0(x) < 0, \quad f_i(x) \leq 0, \quad i \in [1 : m],$$

ինչը հակասություն է:

0 կետը անջափենք հիպերհարթությամբ C ուռուցիկ բազմությունից: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունեն

$\lambda_i, i \in [0 : m]$, թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ, այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \mu_i \geq 0 \quad \forall (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in C : \quad (3.5.2)$$

Ցույց տանք, որ $\lambda_i \geq 0, i \in [0 : m]$: Ենթադրենք, որ ինչ-որ i_0 ինդեքսի համար տեղի ունի $\lambda_{i_0} < 0$ անհավասարությունը: Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\delta > 0$ և $\mu_{i_0} > 0$ թվի համար $\mu \equiv (\delta, 0, \dots, \mu_{i_0}, 0, \dots, 0) \in C$: Տեղադրելով μ վեկտորի կոորդինատները (3.5.2) անհավասարությունում՝ կստանանք

$$\delta \lambda_0 + \mu_{i_0} \lambda_{i_0} \geq 0 : \quad (3.5.3)$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, երբ $\delta \rightarrow 0$ և $\mu_{i_0} \rightarrow +\infty$ կստանանք, որ (3.5.3) անհավասարության ձախ մասը ձգարում է $-\infty$, իսկ աջ մասը զրո է, որը հակասություն է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ պնդումը: (3.5.2) անհավասարությունում տեղադրելով

$$\mu_0 = \delta > 0, \mu_1 = 0, \dots, \mu_i = f_i(x^*), \mu_{i+1} = 0, \dots, \mu_m = 0,$$

թվերը կստանանք՝

$$\delta \lambda_0 + \lambda_i f_i(x^*) \geq 0 :$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, երբ δ ձգարի գրոյի՝ կստանանք

$$\lambda_i f_i(x^*) \geq 0 : \quad (2.5.4)$$

Բայց, քանի որ $\lambda_i \geq 0$ և $f_i(x^*) \leq 0$, ապա (2.5.4)-ից հետևում է, որ

$$\lambda_i f_i(x^*) = 0 : \quad (3.5.5)$$

Այժմ ապացուցենք թեորենի եզրակացության առաջին կերպը: Իրոք, ցանկացած $x \in R^n$ -ի համար (3.5.3) անհավասարությունում փեղադրելով

$$\mu_0 = \delta + f_0(x), \mu_1 = f_1(x), \dots, \mu_m = f_m(x)$$

կորրդինատներով μ վեկտորը, կստանանք

$$\lambda_0(\delta + f_0(x)) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) \geq 0 :$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\delta \rightarrow 0$, կստանանք՝

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n \quad (3.5.6)$$

(3.5.5)-(3.5.6)-ից հետևում է որ

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) \geq 0 =$$

$$= \lambda_0 f_0(x^*) + \lambda_1 f_1(x^*) + \dots + \lambda_m f_m(x^*) = L(x^*, \lambda) \quad \forall x \in R^n :$$



Թեորեմ 3.5.2 (Կուն-Տակկեր: Բավարարությունը):
Դիցուք x^* կերպը բավարարում է (3.5.1) խնդրի բոլոր սահմանափակումներին՝

$$f_i(x^*) \leq 0, \quad i \in [1 : m],$$

և գոյություն ունեն այնպիսի $\lambda_0 > 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ թվեր, որ փեղի ունեն թեորեմ 3.5.1-ի 1)-2) պայմանները:

Այդ դեպքում x^* վեկտորը (3.5.1) խնդրի լուծում է:

► Չսահմանափակելով ընդհանրությունը, կարող ենք ենթադրել, որ $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով 1) և 2) պայմանները, կունենանք՝

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*) = f_0(x^*) \quad \forall x \in R^n : \quad (3.5.7)$$

Եթե x վեկտորը այնպիսին է, որ $f_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in [1 : m]$, ապա (3.5.7) անհավասարությունից կստանանք

$$f_0(x) \geq f_0(x^*) :$$

◀

Ռեգուլյարության պայմանը: Այս պայմանը (3.5.1) խնդրում հեփևյալն է. գոյություն ունի այնպիսի \bar{x} վեկտոր, որ

$$f_i(\bar{x}) < 0, \quad i \in [1 : m] :$$

Ցույց փանք, որ այս պայմանի դեպքում λ_0 գործակիցը կարելի է վերցնել հավասար մեկի: Իրոք, եթե $\lambda_0 = 0$, ապա թեորեմ 3.5.1-ի 1) և 2) եզրակացություններից հեփևում է, որ

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\bar{x}) \geq 0,$$

որը հակասություն է, քանի որ

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\bar{x}) < 0 :$$

Նշենք, որ եթե $f_i(x)$, $i \in [1 : m]$, ֆունկցիաները անընդհափ են, ապա ռեգուլյարության պայմանը ուռուցիկ ծրագրավորման խնդրում նշանակում է, որ M բազմությունը ունի ներքին կետ: ◀

Ներկանք 3.5.1: Դիցուք

$$M = \{x \in R^n / a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j \in [1 : n]\},$$

որտեղ $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty, \quad j \in [1 : n]$:

Որպեսզի $x^* \in M$ կերպը լինի ուռուցիկ և դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կերպ M բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $j \in [1 : n]$ համար

$$f'_{x_j}(x^*) \begin{cases} = 0, & \text{եթե } a_j < x_j^* < b_j, \\ \geq 0, & \text{եթե } x_j^* = a_j \neq -\infty, \\ \leq 0, & \text{եթե } x_j^* = b_j \neq +\infty : \end{cases}$$

Քանի որ Կուն-Տակկերի թեորեմը մինիմումի անհրաժեշտ և բավարար պայման է, ապա որոշ դեպքերում այն թույլ է փայլիս բացահայտ փնտրով գտնել անհավասարության փիպի սահմանափակումներով մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծումները:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min, \quad -1 \leq x_1 \leq 1, \quad x_2 \geq 2 :$$

Քանի որ f -ը ուժեղ ուռուցիկ ֆունկցիա է, իսկ սահմանափակումներով փրվող բազմությունը փակ է և ուռուցիկ, ապա այս խնդիրն ունի միակ լուծում և այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \begin{cases} = 0, & \text{եթե } -1 < x_1 < 1, \\ \geq 0, & \text{եթե } x_1 = -1, \\ \leq 0, & \text{եթե } x_1 = 1; \end{cases}$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \begin{cases} = 0, & \text{եթե } x_2 > 2, \\ \geq 0, & \text{եթե } x_2 = 2 : \end{cases}$$

Այժմ այս պայմաններից կարելի կազմել վեց համակարգեր և լուծել դրանք: Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0, & -1 < x_1 < 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, & x_2 = 2 \end{cases}$$

համակարգը համարելի է և $(-1/2, 2)$ վեկտորը նրա լուծումն է: Ներկայացրեք այդ վեկտորը նաև մինիմիզացիայի խնդրի միակ լուծումն է :

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} x_1^2 + (x_2 - 2)^2 &\rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &\leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ թույլատրելի արժեքների բազմությունը ունի ներքին կետ, ապա Լագրանժի ֆունկցիայում λ_0 գործակիցը կարելի է վերցնել հավասար մեկի: Կիրառելով Կուն-Տակկերի թեորեմը՝ կստանանք.

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda) = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda) = 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \lambda_2 x_2 = 0, \lambda_3 x_3 = 0 : \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 : \end{cases} \quad (3.5.8)$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը:

- 1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$: Այդ դեպքում (3.5.8) համակարգից ստանում ենք $x_1 = 0, x_2 = 2$, որը չի բավարարում $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ անհավասարությանը:
- 2) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$: Այս դեպքում(3.5.8)

համակարգից կստանանք

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ 2x_1(1 + \lambda_1) = 0, \\ 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0 : \end{cases}$$

Եթե $\lambda_1 = -1$, ապա երրորդ հավասարումը տեղի չունի:

Եթե $\lambda_1 \neq -1$, ապա կստանանք

$$x_1 = 0, x_2 = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0 :$$

Քանի որ մինիմիզացվող ֆունկցիան ուժեղ ուռուցիկ է, իսկ թույլափակի վեկտորների բազմությունը փակ է և ուռուցիկ, ապա $(0, 1)$ կետը խնդրի միակ լուծումն է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Կուն-Տակկերի թեորեմի օգնությամբ լուծել հետևյալ խնդիրները.

ա)

$$\begin{aligned} (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 4)^2 + 1 &\rightarrow \min, \\ 2x_1 - x_2 - 2 &\leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 : \end{aligned}$$

բ)

$$\begin{aligned} (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 &\rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 : \end{aligned}$$

զ)

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \min, \\ 2x_1^2 + (x_2 - 4)^2 &\leq 1:\end{aligned}$$

դ) $4x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 \rightarrow \min, 4 \leq x_1 \leq 8, -1 \leq x_2 \leq 2:$

2. Մտնուգել, արդյոք $(0, 4)$ վեկպորը հեքեյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ.

$$\begin{aligned}x_1^2 + (x_2 - 2)^2 &\rightarrow \min, \\ x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 &\leq 8, \\ x_1^2 + 2x_2^2 &\leq 32:\end{aligned}$$

3. Մտնուգել, արդյոք $(0, 1)$ վեկպորը հեքեյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ.

$$\begin{aligned}\exp(x_1 - x_2) &\rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\leq 0:\end{aligned}$$

Գլուխ 4

Լազրանժի անորոշ գործակիցների

մեթոդը

Լազրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը օպերիմիզացիայի այն հիմնարար սկզբունքներից է, որի միջոցով պայմանական օպերիմիզացիայի խնդիրները բերվում են ոչ պայմանական օպերիմիզացիայի խընդիրների:

Մասնավորապես, այս գլխում դիտարկվում են մաթեմատիկական ծրագրավորման այնպիսի խնդիրներ, որոնցում սահմանափակումները բերվում են հավասարություններով և անհավասարություններով: Ենթադրվում է, որ նպատակային ֆունկցիան և սահմանափակումները ներկայացնող ֆունկցիաները ողորկ են: Յույց է բերվում, որ այդպիսի խնդիրների էքստրեմալները գտնվում են Լազրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերի բազմության մեջ:

Վերջին ժամանակներս, փորձ է արվում հիմնավորել Լազրանժի մեթոդը մաթեմատիկական ծրագ-

րավորման ոչ ողորկ խնդիրների համար: Նման ուսումնասիրություններին կարելի է ծանոթանալ [7, 11] աշխատանքներում:

4.1 Օպտիմալության առաջին և երկրորդ կարգի պայմանները

Սահմանում 4.1.1: $h \in R^n$ վեկտորը կոչվում է M բազմությանը $x^* \in M$ կետում **շոշափող**, եթե գոյություն ունի այնպիսի

$$\varphi : [-1, 1] \rightarrow R^n, \quad \varphi(\alpha) = o(\alpha)$$

արտապարկերում, որ բավականաչափ փոքր $\alpha > 0$ թվերի համար փեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$x^* + \alpha h + \varphi(\alpha) \in M :$$

$K_M(x^*)$ սիմվոլով նշանակենք M բազմությանը x^* կետում փարված շոշափող վեկտորների բազմությունը:

Սահմանում 4.1.2: Եթե K -ն կոն է, ապա

$$K^* \equiv \{y \in R^n / (y, x) \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

բազմությունը կոչվում է K -ի համալուծ կոն:

Թեորեմ 4.1.1 (Լյուստերնիկի թեորեմը շոշափող հարթության մասին): Դիցուք

$$M = \{x \in R^n / f_i(x) = 0, \quad i \in [1 : m]\},$$

որտեղ f_i , $i \in [1 : m]$, ֆունկցիաները անընդհար դիֆերենցելի են:

Դիցուք $x^* \in M$ և ենթադրենք, որ $f'_i(x^*)$, $i \in [1 : m]$, գրադիենտները գծորեն անկախ են:

Այդ դեպքում

$$K_M(x^*) = H \equiv \{h \in R^n / (f'_i(x^*), h) = 0, i \in [1 : m]\} :$$

Այսինքն H ենթադարձությունը շոշափող կոն է M բազմության համար x^* կետում:

► Յույց փանք, որ H հարթության կամայական վեկտորը շոշափող վեկտոր է:

Նշանակենք

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(x^*) & f'_{1x_2}(x^*) \dots & f'_{1x_n}(x^*) \\ f'_{2x_1}(x^*) & f'_{2x_2}(x^*) \dots & f'_{2x_n}(x^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{mx_1}(x^*) & f'_{mx_2}(x^*) \dots & f'_{mx_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

Կազմենք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$g_i(\alpha, r) = f_i(x^* + \alpha h + \mathbf{A}^\top r) = 0, i \in [1 : m], \quad (4.1.1)$$

որտեղ r -ը m չափանի վեկտոր է: Յույց փանք, որ այս համակարգը բավարարում է անբացահայտ ֆունկցիայի վերաբերյալ թեորեմի բոլոր պայմաններին:

Իրոք,

$$g_i(0, 0) = 0, \quad g'_{i\alpha}(0, 0) = (f'_i(x^*), h) = 0, \quad i \in [1 : m] :$$

Ակնհայտ է նաև, որ $\{g'_{ir_j}\}$ կոորդինատներով ֆունկցիոնալ մաքրիցը $(0, 0)$ կետում հավասար

է $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ մափրիցին, որն ունի հակադարձ: Ներկաբար, գոյություն ունի $r(\alpha)$ արփապարկերում, որոշված զրո կետի ինչ-որ շրջակայքում, այնպիսին, որ այն այդ շրջակայքում բավարարում է (4.1.1) համակարգին և

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = -B^{-1}g'_\alpha(0, 0) = 0,$$

որտեղ

$$g'_\alpha(0, 0) = (g'_{1\alpha}(0, 0), \dots, g'_{m\alpha}(0, 0)) :$$

Ներկաբար՝

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha) - r(0)}{\alpha} = r'(0) = 0 : \quad (4.1.2)$$

Նշանակելով $\varphi(\alpha) = \mathbf{A}^\top r(\alpha)$, (4.1.1)-(4.1.2) պայմաններից կսրանանք

$$\varphi(\alpha) = o(\alpha) \text{ և } g_i(x^* + \alpha h + \varphi(\alpha)) = 0 \quad \forall i \in [1 : m] :$$

Իսկ սա նշանակում է, որ $h \in K_M(x^*)$: Այսպիսով ապացուցվեց, որ $H \subseteq K_M(x^*)$:

Այժմ ցույց փանք, որ $K_M(x^*) \subseteq H$: Դիցուք $h \in K_M(x^*)$: Ըստ շոշափող վեկտորի սահմանման գոյություն ունի այնպիսի $\varphi(\alpha) = o(\alpha)$ արփապարկերում, որ բավականաչափ փոքր դրական α թվերի համար

$$f_i(x^* + \alpha h + \varphi(\alpha)) = 0, \quad i \in [1 : m] :$$

Այստեղից, համաձայն դիֆերենցելիության պայմանի, կամայական i -ի դեպքում կունենանք

$$0 = f_i(x^* + \alpha h + \varphi(\alpha)) - f_i(x^*) = \alpha[(f'_i(x^*), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}] :$$

Ուսարի

$$(f'_i(x^*), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0 \Rightarrow (f'_i(x^*), h) = 0 \Rightarrow h \in H :$$



Դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի ընդհանուր խնդիրը.

$$f(x) \rightarrow \min, x \in M : \quad (4.1.3)$$

Թեորեմ 4.1.2 (Մինիմումի ընդհանուր անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք f ֆունկցիան դիֆերենցելի է, իսկ $x^* \in M$ կետը (4.1.3) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում

$$f'(x^*) \in K_M^*(x^*) :$$

► Ենթադրենք

$$f'(x^*) \notin K_M^*(x^*) :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $h \in K_M(x^*)$ վեկտոր, որ $(f'(x^*), h) < 0$: Այսպեղից քանի որ f -ը դիֆերենցելի է, ապա բավականաչափ փոքր $\alpha > 0$ թվերի համար կունենանք

$$f(x^* + \alpha h) = f(x^*) + \alpha[(f'(x^*), h) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}] < f(x^*) :$$

Սա հակասություն է, քանի որ x^* -ն f -ի լոկալ մինիմումի կետ է M բազմության վրա:



Թեորեմ 4.1.3 (Նամայում լոնի կառուցումը):
 Դիցուք f_i լինեն **թեորեմ 4.1.1-ի** պայմանները:
 Այդ դեպքում՝

$$K_M^*(x^*) = H^\perp = A \equiv \{y \in R^n / y = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*),$$

$$\lambda_i \in R, i \in [1 : m]\} :$$

► Նախ, քանի որ H -ը ենթաարածություն է և $K_M(x^*) = H$, ապա

$$K_M^*(x^*) = H^\perp :$$

Այժմ ցույց բերենք, որ

$$A \subseteq H^\perp :$$

Իրոք, դիցուք

$$\forall h \in H, \forall y \in A \Rightarrow y = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y, h) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (f'_i(x^*), h) = 0 \Rightarrow y \in H^\perp :$$

Այժմ ենթադրենք, որ գոյություն ունի այնպիսի $b \in H^\perp$ վեկտոր, որ $b \notin A$: Քանի որ $f'_i(x^*)$, $i \in [1 : m]$ գրադիենտները գծորեն անկախ են, ապա A -ն m չափանի ենթաարածություն է, որը փակ ուռուցիկ բազմություն է: Անջատենք այն b կետից: Նամաձայն խիստ անջատման **թեորեմ 3.1.2-ի**՝ գոյություն ունեն այնպիսի p վեկտոր և $\varepsilon > 0$ թիվ, որ

$$(p, a) \leq (p, b) - \varepsilon \quad \forall a \in A : \quad (4.1.4)$$

Ցույց փանք, որ

$$(p, a) = 0 \quad \forall a \in A :$$

Եթե որևէ $a \in A$ -ի համար $(p, a) > 0$, ապա փեղադրելով $\alpha a \in A$ ($\alpha \geq 0$) վեկփորները (4.1.4) անհավասարության մեջ և ձգփեցնելով α -ն անվեջության կսփանանք հակասություն, քանի որ անհավասարության ձախ մասը կձգփի $+\infty$, իսկ աջ մասը վերջավոր թիվ է: Եթե $(p, a) < 0$, ապա կսփարելով նույն դափողությունները, նորից կգանք հակասության: Այսպիսով, $(p, a) = 0 \quad \forall a \in A :$

Այսփեղից

$$(f'_i(x^*), p) = 0, \quad i \in [1 : m] \Rightarrow p \in H \Rightarrow (p, b) = 0 : \quad (4.1.5)$$

Բայց (4.1.4) անհավասարությունից հեփևում է, որ $(p, b) > \varepsilon > 0$, ինչը հակասում է (4.1.5)-ին : Այսպիսով, ապացուցվեց, որ

$$K_M^*(x^*) = H^\perp = A :$$



Այժմ դիփարկենք հավասարության փիպի սահմանափակումներով պայմանական օպփիմիզացիայի հեփեվյալ խնդիրը՝

$$f_0(x) \rightarrow \text{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad i \in [1 : m] : \quad (4.1.6)$$

Ենթադրվում է, որ f_i , $i \in [0 : m]$, ֆունկցիաները անընդհափ դիֆերենցելի են R^n -ի վրա: Պահանջվում է գոնեի $f_0(x)$ ֆունկցիայի էքսփրեմումի կեփերը

$$M \equiv \{x \in R^n / f_i(x) = 0, \quad i \in [1 : m]\}$$

բազմության վրա: Այդ կետերը կոչվում են (4.1.6) խընդրի լուծումներ: M բազմության կետերը կոչվում են (4.1.6) խնդրի թույլափրելի կետեր:

Դիցուք $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1}$: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) :$$

Թեորեմ 4.1.4 (Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը): Դիցուք x^* կետը (4.1.6) խնդրի լուծումն է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը գրոյից փարքեր է այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(x^*) = 0,$$

կամ որ նույնն է

$$L'_x(x^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow L'_{x_i}(x^*, \lambda) = 0, \quad i \in [1 : n] : \quad (4.1.7)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ թվերը կոչվում են Լագրանժի բազմապարկիչներ կամ անորոշ գործակիցներ:

► Ենթադրենք, որ x^* կետը (4.1.6) խնդրում լուկալ մինիմումի կետ է (լուկալ մաքսիմումի դեպքը քննարկվում է անալոգ ձևով):

Եթե $f'_1(x^*), f'_2(x^*), \dots, f'_m(x^*)$ գրադիենտները գծորեն անկախ են, ապա, ըստ մինիմումի ընդհանուր անհրաժեշտ պայմանի և **թեորեմ 4.1.3-ի**, կունենանք

$$f'_0(x^*) \in K_M^*(x^*) =$$

$$= \{y/y = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*), \lambda_i \in R, i \in [1 : m]\} :$$

Այսպեղից անմիջականորեն հետևում է, որ գոյություն ունեն $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ թվեր, այնպիսին, որ

$$f'_0(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*) :$$

Այս դեպքում թեորեմի պնդումը ապացուցված է:

Եթե $f'_i(x^*), f'_2(x^*), \dots, f'_m(x^*)$ գրադիենտները գծորեն կախված են, ապա գոյություն կունենան գործակիցներ $\lambda_i, i \in [1 : m]$, որոցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*) = 0 :$$

Այսպեղից հետևում է, որ

$$0 f'_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*) = 0 :$$



Այժմ ենթադրենք, որ (4.1.6) խնդրում բոլոր ֆունկցիաները երկու անգամ անընդհապ դիֆերենցելի են: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը (տես, օրինակ՝ [4]):

Թեորեմ 4.1.5 (*Էքստրեմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանը*): Դիցուք x^* -ը (4.1.6) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է և $f'_1(x^*), f'_2(x^*), \dots, f'_m(x^*)$ վեկորդները գծորեն անկախ են: Այդ դեպքում գոյություն ունեն

$\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ թվեր այնպիսին, որ փեղի ունի հեղրկյալ պայմանը.

$$\begin{aligned} (L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) \geq 0 \quad ((L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) \leq 0) \quad \forall h \in H = \\ = \{h \in R^n / (f'_i(x^*), h) = 0, \quad i \in [1 : m]\} : \end{aligned}$$

Թեորեմ 4.1.6 (Երկրորդ կարգի բավարար պայմանը): Դիցուք x^* -ը (4.1.6) խնդրի թոյլարեւի կեպ է և գոյություն ունի այնպիսի $\lambda \in R^{m+1}$ վեկորր, որ փեղի ունեն հեղրկյալ պայմանները.

- 1) $\lambda_0 = 1,$
- 2) $L'_{x_i}(x^*, \lambda) = 0, \quad i \in [1 : n],$
- 3) կամայական ոչ գրոյական $h \in H$ վեկորրի համար փեղի ունի

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) > 0 \quad ((L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) < 0) \quad (4.1.8)$$

անհավասարությունը:

Այդ դեպքում x^* -ը (4.1.6) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կեպ է:



Եթե x^* կեպը M բազմության առանձնացված կեպ է, ապա թեորեմի եզրակացությունը փրիվիալ է: Դիցուք այժմ x^* -ը M բազմության սահմանային կեպ է և այն խնդրում լոկալ մինիմումի կեպ չէ: Այդ դեպքում գոյություն կունենա այնպիսի $\{x^k\}$ հաջորդականություն, որը բավարարում է հեղրկյալ պայմաններին.

$$x^k \in M, \quad x^k \rightarrow x^*, \quad f_0(x^k) < f_0(x^*) : \quad (4.1.9)$$

x^k -ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$x^k = x^* + \alpha_k h^k, \text{ որտեղ } h^k = (x^k - x^*)/\alpha_k :$$

Քանի որ, $\|h^k\| = 1$, ապա ընդհանրությունը չսահմանափակելով կարող ենք ենթադրել, որ

$$h^k \rightarrow h \neq 0 :$$

Նաշվի առնելով (4.1.9) պայմանը՝ ունենք

$$0 = f_i(x^k) - f_i(x^*) = (f'_i(x^*), \alpha_k h^k) + o(\alpha_k), \quad i \in [1 : m] :$$

Բաժանելով այս առնչությունները α_k -ի վրա և անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(f'_i(x^*), h) = 0, \quad i \in [1 : m] :$$

Այսինքն՝ $h \in H$: Քանի որ, ըստ ենթադրության, $\lambda_0 = 1$, ապա (4.1.9)-ից ստանում ենք

$$L(x^k, \lambda) = f_0(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^k) \leq f_0(x^k) \leq$$

$$\leq f_0(x^*) = f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*) = L(x^*, \lambda) : \quad (4.1.10)$$

Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $L(x, \lambda)$ Լագրանժի ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x^* կետում: Ներկայացնելով այդ ֆունկցիան, ըստ Թեյլորի բանաձևի, x^* կետում, ստանում ենք

$$L(x^k, \lambda) = L(x^*, \lambda) + (L'_x(x^*, \lambda), \alpha_k h^k) +$$

$$+\frac{1}{2}(L''_{xx}(x^*, \lambda)(\alpha_k h^k), \alpha_k h^k) + o(\alpha_k^2) :$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, $L'_x(x^*, \lambda) = 0$, ապա այսպետից և (4.1.10) անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{\alpha_k^2}{2}(L''_{xx}(x^*, \lambda)h^k, h^k) + o(\alpha_k^2) \leq 0 :$$

Այս անհավասարության երկու մասերը բաժանելով α_k^2 թվի վրա և անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda)h, h) \leq 0,$$

որը հակասում է թեորեմի (4.1.8) պայմանին:



Պարզագույն դեպքերում Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը թույլ է տալիս բացահայտ Կարգով գտնել մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրների լուծումները հավասարությունների փակ սահմանափակումների դեպքում: Դրա համար պետք է կատարել հետևյալ քայլերը.

- Կազմել Լագրանժի ֆունկցիան:
- Գրել էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը Լագրանժի ֆունկցիայի համար և ստանալ հավասարումների համակարգ, որով բնութագրվում է խնդրի ստացիոնար կետերի բազմությունը:
- Գտնել ստացված համակարգի լուծումները:
- Էքստրեմումի երկրորդ կարգի բավարար պայմանների միջոցով այդ լուծումներից անջատել էքստրեմումի կետերը:

Այս ալգորիթմը մեկնարանենք օրինակներով:
Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr},$$

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 :$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) =$$

$$= \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4) :$$

Ըստ (4.1.7) անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 1) = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 : \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Եթե, $\lambda_0 = 0$, ապա (4.1.11) համակարգից ստանում ենք

$$2\lambda_1(x_1 - 1) = 0, \quad 2\lambda_1 x_2 = 0, \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 : \quad (4.1.12)$$

Քանի որ λ_0 , և λ_1 գործակիցները միաժամանակ զրո չեն, ապա $\lambda_1 \neq 0$:

Նեփևարար, (4.1.12) համակարգի առաջին երկու պայմաններից կտրանանք

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0,$$

որը չի բավարարում երրորդ հավասարմանը: Այսպիսով, $\lambda_0 \neq 0$: Ընդհանրությունը չսահմանափակելով,

կարող ենք ենթադրել, որ $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում (4.1.11) համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 1) = 0, \\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ (x_1 - 1)^2 + x_2 - 4 = 0 : \end{cases} \quad (4.1.13)$$

Դիտարկենք այս համակարգի երկրորդ հավասարումը: Եթե $x_2 = 0$, ապա երրորդից կստանանք $x_1 = 3$, $x_1 = -1$, իսկ առաջին հավասարումից՝ $\lambda_1 = -3/2$:

Եթե $x_2 \neq 0$, ապա երկրորդից կունենանք $\lambda_1 = -1$:

Այդ դեպքում առաջին հավասարումը տեղի չունի, այսինքն (4.1.13) համակարգը համապետելի չէ:

Այսպիսով ստանում ենք երկու ստացիոնար կետեր՝

$$\begin{aligned} x_1^* &= 3, \quad x_2^* = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2}; \\ x_1^* &= -1, \quad x_2^* = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}: \end{aligned}$$

Ստուգենք երկրորդ կարգի (4.1.8) բավարար պայմանները այդ կետերի համար: Ունենք՝

$$(L''_{xx}h, h) = 2(1 + \lambda_1)h_1^2 + 2(1 + \lambda_1)h_2^2,$$

$$h \in H = \{h = (h_1, h_2) \in R^2 / 2(x_1^* - 1)h_1 + 2x_2^*h_2 = 0\} :$$

Այսպետից հեշտ է տեսնել, որ $A(3, 0)$ կետի համար տեղի ունի

$$(L''_{xx}h, h) < 0 \quad \forall h \in H, \quad h \neq 0,$$

անհավասարությունը: Ուստի, A -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Նման ձևով համոզվում ենք, որ $B(-1, 0)$ -ն լոկալ մինիմումի կետ է: Մյուս կողմից, քանի որ f_0

Ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներին, ապա B կետը գլոբալ մինիմումի կետ է, իսկ A -ն գլոբալ մաքսիմումի կետ է:

Օրինակ 2: Լուծել հեքսյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min, \\ f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ f_2(x) &= x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 : \end{aligned}$$

Ըստ (4.1.7) անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք՝

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x, \lambda) = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_2}(x, \lambda) = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ L'_{x_3}(x, \lambda) = 2\lambda_0 x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ f_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 : \end{cases}$$

Եթե, $\lambda_0 = 0$, ապա կստանանք հավասարումների հեքսյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 : \end{cases} \quad (4.1.14)$$

Եթե $\lambda_1 = 0$, ապա (4.1.14) համակարգի երրորդ հավասարումից հեքսնում է, որ $\lambda_2 = 0$, որը հնարավոր չէ, որովհետև բոլոր գործակիցները միաժամանակ զրո չեն: Եթե $\lambda_1 \neq 0$, ապա (4.1.14) համակարգի առաջին երեք հավասարումներից ստանում ենք

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2} :$$

Տեղադրելով այս արժեքները համակարգի վերջին երկու հավասարումների մեջ՝ ստանում ենք հակասություն: Այսպիսով, $\lambda_0 \neq 0$: Ընդունենք $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} 2x_1(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0, \\ 2x_2(1 + \lambda_2) + \lambda_2 = 0, \\ 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0, \end{cases} \quad (4.1.15)$$

(4.1.15) համակարգը ունի հետևյալ երկու լուծումները.

$$\begin{aligned} x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 2, \quad \lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{10}{3}; \\ x_1^* = -2, \quad x_2^* = -2, \quad x_3^* = 8, \quad \lambda_1 = -\frac{20}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{68}{3} : \end{aligned}$$

Ստուգենք երկրորդ կարգի (4.1.8) բավարար պայմանները $A(1, 1, 2)$ և $B(-2, -2, 8)$ կետերի համար: Ունենք

$$(L''_{xx}h, h) = 2(1 + \lambda_1)h_1^2 + 2(1 + \lambda_1)h_2^2 + 2h_2h_3,$$

$$h \in H = \{h \in R^3 / 2x_1^*h_1 + 2x_2^*h_2 - h_3 = 0,$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0\} :$$

Այսպետից $A(1, 1, 2)$ կետի համար կստանանք

$$h_1 = -h_2, h_3 = 0 \Rightarrow (L''_{xx}h, h) = \frac{10}{3}h_2^2 > 0 \quad \forall h \neq 0 :$$

Այսինքն՝ A -ն լոկալ մինիմումի կետ է: Նույն ձևով ստանում ենք, որ $B(-2, -2, 8)$ -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Լուծել հեփկյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \min, \\x_1^2 + x_2^2 - 8 &= 0:\end{aligned}$$

2. Լուծել հեփկյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \min, \\x_1^2 + 2x_2^2 - 8 &= 0:\end{aligned}$$

3. Մքուգել, արդյոք $(0, 2)$ կեփը հեփկյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &\rightarrow \min, \\x_2 + x_1^2 - 2 &= 0:\end{aligned}$$

4. Մքուգել, արդյոք $(-2, 2)$ կեփը հեփկյալ խնդրի լուծումն է, թե ոչ:

$$\begin{aligned}x_1x_2 &\rightarrow \min, \\x_1^2 + x_2^2 - 8 &= 0:\end{aligned}$$

5. Լուծել հեփկյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned}2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 &\rightarrow \text{extr}, \\2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12, \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10:\end{aligned}$$

6. Լուծել հեփկյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &\rightarrow \max, \\x_1 + 2x_2^2 - x_3 &= 4, \\2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14:\end{aligned}$$

4.2 Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը (խառը սահմանափակումների դեպքը)

Այժմ դիտարկենք պայմանական օպտիմիզացիայի ընդհանուր խնդիրը, որպեսզի սահմանափակումները փրվում են հավասարություններով և անհավասարություններով՝

$$f_0(x) \rightarrow \text{extr},$$

$$f_i(x) = 0, \quad i \in [1 : k], \quad f_i(x) \leq 0, \quad i \in [k + 1 : m] : \quad (4.2.1)$$

Այսպես ենթադրվում է, որ $f_i(x)$, $i \in [0 : m]$, ֆունկցիաները անընդհապ դիֆերենցելի են R^n -ի վրա:

$x \in R^n$ կետը կոչվում է թույլատրելի, եթե այն բավարարում է (4.2.1) խնդրի բոլոր սահմանափակումներին: $x^* \in R^n$ կետը կոչվում է (4.2.1) խնդրի լուծում, եթե այն $f_0(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է

$$M \equiv \{x \in R^n / f_i(x) = 0, \quad i \in [1 : k], \\ f_i(x) \leq 0, \quad i \in [k + 1 : m]\}$$

բազմության վրա:

Սահմանում 4.2.1: *Դիցուք \bar{x} թույլատրելի կետ է (4.2.1) խնդրում: $f_i(x) \leq 0$ ($i \in [k + 1 : m]$) սահմանափակումը կոչվում է ակտիվ այդ կետում, եթե $f_i(\bar{x}) = 0$: Եթե $f_i(\bar{x}) < 0$, ապա այդ սահմանափակումը կոչվում է պասիվ:*

$I_{\text{ա}}(\bar{x})$ սիմվոլով նշանակենք \bar{x} կետում ակտիվ սահմանափակումների ինդեքսների բազմությունը՝

$$I_{\text{ա}}(\bar{x}) = \{i \in [k + 1, m] / f_i(\bar{x}) = 0\} :$$

Ճիշդ են հետևյալ պնդումները (տես, օրինակ՝ [4, 6]):

Թեորեմ 4.2.1 (Էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք x^* կետը (4.2.1) խնդրում լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կետ է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ թվեր, որոնցից զոնե մեկը զրոյից տարբեր է այնպիսին, որ

ա) $L'_{x_i}(x^*) = 0, i \in [1 : n]$, որպեսզի

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x),$$

բ) $\lambda_i \geq 0 (\lambda_i \leq 0), i \in [k + 1 : m]$,

գ) $\lambda_i f_i(x^*) = 0, i \in [k + 1 : m]$:

դ) պայմանը կոչվում է պասիվ-ակտիվ սահմանափակումների պայման:

Թեորեմ 4.2.2 (Առաջին կարգի բավարար պայմանը): Դիցուք x^* վեկտորը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

- 1) x^* -ը (4.2.1) խնդրի թույլատրելի կետ է,
- 2) գոյություն ունի $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ վեկտոր $\lambda_0 = 1$ պայմանով այնպիսին, որ (x^*, λ) զույգը բավարարում է թեորեմ 4.2.1-ի ա), բ), գ) պայմաններին,
- 3) x^* կետում (4.2.1) խնդրի ակտիվ սահմանափակումների և հավասարությունների քանակների գումարը հավասար է n -ի:

Այդ դեպքում, եթե $\lambda_i > 0$, $i \in I_u(x^*)$, ապա x^* -ը (4.2.1) խնդրում լոկալ մինիմումի կետ է, եթե $\lambda_i < 0$, $i \in I_u(x^*)$, ապա x^* -ը (4.2.1) խնդրում լոկալ մաքսիմումի կետ է:

Այժմ ձևակերպենք քայլերի այն հերթականությունը, որոնց միջոցով կարելի է լուծել խառը սահմանափակումներով մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրները:

- Կազմել Լագրանժի ֆունկցիան:
- Գրել էքստրեմումի առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանը Լագրանժի ֆունկցիայի համար և սրանալ հավասարումների համակարգ, որով բնութագրվում է խնդրի սրացիոնար կետերի բազմությունը:
- Գրել պասիվ-ակտիվ սահմանափակումների պայմանները և անհավասարություններին համապատասխանող Լագրանժի գործակիցների ոչ բացասական (ոչ դրական) լինելու պայմանները:
- Լուծել սրացված համակարգերը՝ հաշվի առնելով Լագրանժի գործակիցների նշանները:
- Օպտիմալության առաջին կարգի բավարար պայմանների միջոցով այդ լուծումներից անջատել էքստրեմումի կետերը:

Այս ալգորիթմը մեկնաբանենք օրինակի միջոցով:

Օրինակ: Լուծել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2^2 &\rightarrow \text{extr}, \\ x_1 - x_2 - 1 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 &\leq 0: \end{aligned}$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x, \lambda) = \lambda_0(x_1 - x_2^2) + \lambda_1(x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5) :$$

Ըստ Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի՝ ունենք հավասարումների և անհավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$(ա) \quad L'_{x_1}(x, \lambda) = \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2x_1 = 0,$$

$$(բ) \quad L'_{x_2}(x, \lambda) = -2\lambda_0x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2x_2 = 0,$$

$$(գ) \quad x_1 - x_2 - 1 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0,$$

$$(դ) \quad \lambda_2 \geq 0,$$

$$(ե) \quad \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0 :$$

Դիտարկենք երկու դեպք.

$$1) \quad \lambda_0 = 0,$$

$$2) \quad \lambda_0 \neq 0:$$

Առաջին դեպքում համակարգի (ա) և (բ) հավասարումներից կստանանք

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2x_1 = 0, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2x_2 = 0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

համակարգը: Եթե $\lambda_2 = 0$, ապա (4.2.2) համակարգից կստանանք $\lambda_1 = 0$, այսինքն բոլոր բոլոր գործակիցները զրո են, որը հակասություն է:

Եթե $\lambda_2 \neq 0$, ապա (գ) և (ե) պայմաններից կստանանք

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 : \end{cases}$$

համակարգը: Այս համակարգը ունի երկու լուծում.

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

կամ

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -2 : \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Գումարելով (4.2.2) համակարգի հավասարումները՝ կստանանք

$$2\lambda_2(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 = -x_2,$$

որը հակասում է (4.2.3) և (4.2.4) համակարգերին: Նեյրևաբար, առաջին դեպքը հնարավոր չէ:

Դիտարկենք երկրորդ դեպքը. $\lambda_0 \neq 0$: Ընդունելով $\lambda_0 = 1$ (ա) - (բ) պայմաններից կստանանք

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0 : \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Եթե $\lambda_2 = 0$, ապա (4.2.5) համակարգից և (գ) հավասարությունից կստանանք

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 = 0, \\ -2x_2 - \lambda_1 = 0, \\ x_1 - x_2 - 1 = 0 : \end{cases}$$

Լուծելով այս համակարգը՝ ստանում ենք սրացիոնար հեքսյալ կեքը.

$$A(3/2, 1/2), \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0 :$$

$\lambda_2 \neq 0$ դեպքում ունենք

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 5, \\ x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ -2x_2 - \lambda_1 + 2x_2 = 0 : \end{cases}$$

համակարգը: Լուծելով այս համակարգը՝ ստանում ենք
ևս երկու ստացիոնար կետեր.

$$B(2, 1), \lambda_1 = -5/3, \lambda_2 = 1/6,$$

$$C(-1, -2), \lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 5/6 :$$

Այս երեք կետերի համար ստուգենք էքստրեմումի
առաջին կարգի բավարար պայմանները:

B կետի համար ակտիվ է $x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0$
սահմանափակումը և նրան համապատասխան Լագ-
րանժի գործակիցը դրական է: Մյուս կողմից, ակ-
տիվ սահմանափակումների և հավասարությունների
քանակների գումարը հավասար է երկուսի, որը
անհայրների թիվն է: Նշանակում է B -ն լոկալ մի-
նիմումի կետ է: Նույն ձևով C -ն լոկալ մինիմումի կետ
է: Բայց քանի որ խնդրի սահմանափակումների բազ-
մությունը կոնպակտ է, ապա նպատակային ֆունկցիան
ունի գլոբալ մինիմումի և մաքսիմումի կետեր: Տաշվելով
ստացված կետերում նպատակային ֆունկցիայի
արժեքները՝ պարզում ենք, որ A կետը գլոբալ
մաքսիմումի կետ է, C -ն գլոբալ մինիմումի կետ է,
իսկ B -ն լոկալ մինիմումի կետ է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Լուծել խառը սահմանափակումներով հեփկյալ խնդիրը.

$$x_1^2 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$

$$1 - x_1 \leq 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 \leq 0 :$$

2. Լուծել խառը սահմանափակումներով հեփկյալ խնդիրը.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 :$$

3. Գտնել շոշափող $K_M(x)$ կոնը M բազմություն համար x կետում:

ա) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 \setminus \text{int}(R_+^2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$,
 $x = (0, 1)$;

բ) $M = \{(x_1, x_2) \in R^2 \setminus \text{int}(R_+^2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$,
 $x = (0, 0)$;

գ) $M = \{(x_1, x_2) / x_1^2 \leq x_2^3\}$, $x = (0, 0)$;

դ) $M = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, $x = 0$;

ե) $M = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$, $x = 0$:

4. Ապացուցել հեփկյալ պնդումը: Որպեսզի $K \subseteq R^n$ կոնը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$:

5. Դիցուք $K \subseteq R^n$ փակ ուռուցիկ կոն է: Ապացուցել, որ $K^{**} = K$:

6. Դիցուք $K_1, K_2 \subseteq R^n$ -ը փակ ուռուցիկ կոնեքտ են:
Ապացուցել, որ

ա) $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$;

բ) $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$:

Լուծում: Ունենք

$$\begin{aligned} (K_1 \cap K_2)^* &= (K_1^{**} \cap K_2^{**})^* = \\ &= ((K_1^* + K_2^*)^*)^* = (K_1^* + K_2^*)^{**} = \overline{K_1^* + K_2^*} : \end{aligned}$$

Գլուխ 5

Վարիացիոն հաշիվ

Վարիացիոն հաշիվը օպտիմիզացիայի բաժին է, որպեսզի ուսումնասիրվում են ինֆեզրալային փիպի ֆունկցիոնալների մինիմիզացիայի խնդիրները որոշ ֆունկցիոնալ փարածություններում:

Այս գլխում դիտարկվում է

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx$$

փիպի ֆունկցիոնալի մինիմիզացիայի (մաքսիմիզացիայի) խնդիրը $C^1[x_0, x_1]$ ֆունկցիոնալ փարածության վրա: Ցույց է տրվում, որ այդ ֆունկցիոնալի էքստրեմումները բավարարում են եզրային պայմաններով երկրորդ կարգի մի դիֆերենցիալ հավասարմանը, որը կոչվում է Էյլերի հավասարում: Այդ հավասարումով կապ է ստեղծվում վարիացիոն հաշվի և դիֆերենցիալ հավասարումների պետություն-

ների միջև: Այդ իսկ պարհառով վարիացիոն հաշվի մեթոդները օգտագործում են եզրային պայմաններով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության ապացույցներում: Այս գլխում վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդիրների էքստրեմալների բնորոշման համար փրվում են որոշ բավարար պայմաններ:

Վարիացիոն հաշվի փետության ավելի խորը ուսումնասիրություններին կարելի է ծանոթանալ [1-2, 12-13] աշխատանքներում:

5.1 Էյլերի հավասարումը

Դիցուք $L(x, y, y')$ որպես երեք փոփոխականի ֆունկցիա երկու անգամ անընդհապ դիֆերենցելի է R^3 -ի վրա: Պահանջվում է գրնել այնպիսի $y(x) \in C^1[x_0, x_1]$ ֆունկցիա, որը բավարարի $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ եզրային պայմաններին և հանդիսանա $I(y) \equiv \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx$ ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կեր $C^1[x_0, x_1]$ փարածության նորմի իմաստով: Այս խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$I(y) \equiv \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad (5.1.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

որը կոչվում է ամրացված եզրերով վարիացիոն խնդիր: Այն վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդիրն է:

Այժմ փանք I ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի (լոկալ

մաքսիմումի) սահմանումը $C^1[x_0, x_1]$ փարածության նորմի իմաստով:

Սահմանում 5.1.1: *Դիցուք*

$$M \equiv \{y \in C^1[x_0, x_1] / y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\} :$$

$y^* \in M$ կոչվում է I ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի (լոկալ մաքսիմումի) կեր M բազմության վրա, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր $y \in M$ ֆունկցիաների համար, որոնք բավարարում են $\|y - y^*\|_1 < \delta$ պայմանին, չեղի ունի

$$I(y) \geq I(y^*) \quad (I(y) \leq I(y^*)) :$$

անհավասարությունը:

y^* -ը կոչվում է նաև (5.1.1) ինդրի լուծում:

Թեորեմ 5.1.1: *Եթե $y^*(x)$ ֆունկցիան (5.1.1) ինդրի լուծումն է, ապա այն բավարարում է*

$$-\frac{d}{dx}L'_{y'} + L'_y = 0, \tag{5.1.2}$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը, որը կոչվում է Էյլերի հավասարում:

► Ենթադրենք, որ y^* -ը (5.1.1) ինդրում լոկալ մինիմումի կեր է (լոկալ մաքսիմումի դեպքը քրն-նարկվում է անալոգ ձևով): Դիցուք $h(\cdot) \in C^1_0[x_0, x_1]$: Այսինքն

$$h(\cdot) \in C^1[x_0, x_1] \text{ և } h(x_0) = 0, h(x_1) = 0 :$$

Դիտարկենք մեկ փոփոխականի հետևյալ ֆունկցիան.

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y^*(x) + \alpha h(x), (y^*(x))' + \alpha h'(x)) dx : \quad (5.1.3)$$

Քանի որ y^* -ը I ֆունկցիոնալի լոկալ մինիմումի կետ է, ապա բավականաչափ փոքր α թվերի համար տեղի ունի

$$\varphi(\alpha) \geq \varphi(0)$$

անհավասարությունը: Այսինքն՝ 0 կետը φ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է:

Ներկայացնենք՝

$$\varphi'(0) = 0 :$$

Այսպետից, ըստ պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցման կանոնի, կունենանք

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (L'_{y'} h + L'_{y'} h') dx = 0 : \quad (5.1.4)$$

Կարգաբերենք մասերով ինտեգրում, հաշվի առնելով $h(x_0) = 0$, $h(x_1) = 0$ պայմանները, կստանանք

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} L'_{y'} h' dx &= L'_{y'} (h(x_1) - h(x_0)) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} L'_{y'} h dx = \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} L'_{y'} h dx : \end{aligned}$$

Այսպետից և (5.1.4)-ից կստանանք

$$\int_{x_0}^{x_1} (L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'}) h(x) dx = 0 \quad \forall h(x) \in C^1[x_0, x_1],$$

$$h(x_0) = 0, \quad h(x_1) = 0 : \quad (5.1.5)$$

Այժմ ցույց տանք, որ (5.1.5) պայմանից հետևում է Էյլերի հավասարումը:

Նշանակենք

$$a(x) \equiv L'_y(x, y^*, (y^*)') - \frac{d}{dx} L'_{y'}(x, y^*, (y^*)') :$$

Ցույց տանք, որ

$$a(x) = 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1] :$$

Ենթադրենք, որ ինչ-որ $\xi \in [x_0, x_1]$ կետում $a(\xi) \neq 0$: Ընդհանրությունը չհասխարելով, ենթադրենք, որ $a(\xi) > 0$: Քանի որ $a(x)$ -ը անընդհար ֆունկցիա է, ապա գոյություն կունենա ξ կետի մի շրջակայք՝ $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq [x_0, x_1]$, այնպիսին, որ

$$a(x) > 0 \quad \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) :$$

Դիցուք

$$p = \xi - \delta, \quad q = \xi + \delta :$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ $h(x)$ ֆունկցիան.

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{երթև } x \in [x_0, p] \\ (x - p)^2(x - q)^2, & \text{երթև } x \in [p, q] \\ 0, & \text{երթև } x \in [q, x_1] \end{cases}$$

Պարզ է, որ $h(\cdot) \in C^1[x_0, x_1]$ և $h(x_0) = h(x_1) = 0$:

Ունենք

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)h(x)dx = \int_p^q a(x)h(x) dx > 0,$$

որը հակասում է (5.1.5)-ին:



Օրինակ (Էյլերի հավասարման լուծումը հանդիսանում է լոկալ մինիմումի կերպ):

$$I(y) \equiv \int_1^0 (y')^2 dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 :$$

Կազմենք Էյլերի հավասարումը

$$\frac{d}{dx} 3(y')^2 = 0 \Rightarrow 3(y')^2 = C \Rightarrow y' = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 :$$

Նաշվի առնելով խնդրի եզրային պայմանները՝ կստանանք $y^*(x) = x$, որը խնդրի միակ էքստրեմալն է: Յույց փանք, որ այն լոկալ մինիմումի կերպ է:

Դիցուք

$$h(\cdot) \in C_0^1[0, 1] :$$

Այդ դեպքում

$$I(y^* + h) = \int_0^1 (1 + h')^3 dx = \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 h' dx +$$

$$+ \int_0^1 (h')^2(3 + h') dx = I(y^*) + \int_0^1 (h')^2(3 + h') dx :$$

Այսպետից, ակնհայտ է, որ եթե $\|h\|_1 < 3$, ապա

$$3 + h(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1] :$$

Տեղևաբար՝

$$I(y^* + h) \geq I(y^*),$$

այսինքն՝ $y^*(\cdot)$ -ը լոկալ մինիմումի կեր է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Լուծել վարիացիոն հաշվի հեղևյալ պարզագոյն խնդիրները:

ա) $\int_0^1 ((y')^2 + y^2) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(1) = 1 :$

բ) $\int_{-1}^0 (12xy - (y')^2) dx \rightarrow \min, y(-1) = 1, y(0) = 0 :$

գ) $\int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2) dx \rightarrow \min, y(0) = 1, y(\pi/2) = 0 :$

դ) $\int_0^1 (y^2 + (y')^2 + 2y \exp(x)) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(1) = 1 :$

$$\text{ե) } \int_0^{3/2} ((y')^2 + 2y) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(3/2) = 1 :$$

$$\text{զ) } \int_0^1 (4y \sin x - y^2 - (y')^2) dx \rightarrow \max, y(0) = y(1) = 0 :$$

$$\text{է) } \int_0^{\pi/2} (6y \sin 2x + y^2 - (y')^2) dx \rightarrow \max, y(0) = y(\pi/2) = 0 :$$

2. Ամենաարագ վայրէջքի խնդիրը: Ուղղաձիգ հարթության մեջ միևնույն ուղղաձիգի վրա չգտնվող $O(0, 0)$ և $B(x_1, y_1)$ կետերը միացնել այնպիսի ողորկ կորով (գտնել հավասարումը), որով ծանրության ուժի ազդեցությամբ շարժվող նյութական կետը վերևի O կետից առանց սկզբնական արագության կհասնի ներքևի B կետ ամենակարճ ժամանակում:

Լուծում: Դիցուք $y(x)$ ողորկ կոր է, որը միացնում է O և B կետերը: Դիցուք $M(x, y(x))$ կամայական կետ է կորի վրա: Ըստ էներգիայի պահպանման օրենքի՝ ունենք

$$mv^2/2 = mgy(x),$$

որտեղ m -ը նյութական կետի մասսան է, իսկ v -ն՝ արագությունը M կետում, g -ն՝ ազար անկման արագացումը: Այսպետից կստանանք

$$v = \sqrt{2gy(x)} :$$

Մյուս կողմից, ունենք

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dy}{dt},$$

որպես ds -ը էլեմենտար աղեղի երկարությունն է: Ներկայացնենք,

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx,$$

որպես $T(y)$ -ը այն ժամանակամիջոցն է, որի ընթացքում կետը արված կորով A կետից հասնում է B կետ: Քանի որ $1/\sqrt{2g} > 0$ հաստատվում է, ապա $T(y)$ ֆունկցիոնալի մինիմիզացիայի խնդրում կարելի է այն հաշվի չառնել: Վերջնականորեն կստանանք էքստրեմումի հետևյալ խնդիրը.

$$I(y) \equiv \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{y(x)} dx \rightarrow \min, \quad (5.1.6)$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1 :$$

Կազմենք Էյլերի հավասարումը: Քանի որ (5.1.6)-ում ենթաինտեգրալ L ֆունկցիոնալը բացահայտ կախված չէ x փոփոխականից, ապա Էյլերի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$L - y' L'_{y'} = C \text{ (տես, օրինակ՝ [2])} :$$

Այսպեսով մեր օրինակի համար կունենանք

$$L - y' L'_{y'} = \frac{1 + (y')^2}{\sqrt{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2} y} = C :$$

Պարզեցնելուց հետո կստանանք

$$y(1 + (y')^2) = \frac{1}{C^2} = C_1 :$$

Նշանակենք

$$\begin{aligned} y' = ctgt &\Rightarrow y = \frac{C_1}{1 + (ctgt)^2} = C_1 \sin^2 t \Rightarrow \\ &\Rightarrow dy = 2C_1 \sin t \cos t dt : \end{aligned}$$

Այսպեսով կստանանք

$$\begin{aligned} dx = \frac{dy}{y'} &= \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{ctgt} = 2C_1 \sin^2 t dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = C_1/2(2t - \sin 2t) + C_2 : \end{aligned}$$

Քանի որ $y(0) = 0$, ապա $C_2 = 0$: Նշանակելով $p = 2t$ կստանանք ցիկլոիդների ընտանիք

$$x = C_1/2(p - \sin p), \quad y = C_1/2(1 - \cos p) :$$

C_1 հաստատունը որոշվում է այն պայմանից, որ ցիկլոիդը պետք է անցնի B կետով:

3. Բոլոր ողորկ կորերի մեջ, որոնք միացնում են հարթության $A(2, 1)$ և $B(1, 0)$ կետերը, գտել այն կորը, որով $v = x$ արագությամբ շարժվող նյութական կետը A կետից կհասնի B կետ ամենակարճ ժամանակում:

5.2 Լագրանժի մեթոդը վարիացիոն հաշվի խնդիրներում

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

$$I_0(y) \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_0(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad (5.2.1)$$

$$I_i(y) = \int_{x_0}^{x_1} f_i(x, y, y') dx = \alpha_i, \quad i \in [1 : m], \quad (5.2.2)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 : \quad (5.2.3)$$

Այս խնդիրը կոչվում է վարիացիոն հաշվի **իզոպե-րիմետրիկ** խնդիր: Ենթադրվում է, որ f_i , $i \in [0 : m]$ ֆունկցիաները, որպես երեք փոփոխականի ֆունկցիաներ, երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի են R^3 -ի վրա, Իսկ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ հասարակույնները փրված թվեր են:

$y^{*1}[x_0, x_1]$ ֆունկցիան կոչվում է թույլատրելի, եթե այն բավարարում է (5.2. 2)-(5.2.3) պայմաններին:

Սահմանում 5.2.1: *Կասենք, որ թույլատրելի y^* ֆունկցիան (5.2.1)-(5.2.3) խնդրում լոկալ մինիմում է (լոկալ մաքսիմում է), եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ այնպիսին, որ բոլոր թույլատրելի y ֆունկցիաների համար, որոնք բավարարում են $\|y - y^*\|_1 < \delta$ պայմանին, տեղի ունի*

$$I_0(y) \geq I_0(y^*) \quad (I_0(y) \leq I_0(y^*))$$

անհավասարությունը:

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x, y, y', \lambda) \equiv \lambda_0 f_0(x, y, y') + \lambda_1 f_1(x, y, y') + \dots + \\ + \lambda_m f_m(x, y, y'),$$

որտեղ $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1}$:

Թեորեմ 5.2.1: Դիցուք $y^*(x)$ ֆունկցիան (5.2.1) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ այնպիսին, որ $y^*(x)$ -ը բավարարում է

$$-\frac{d}{dx}L'_{y'} + L'_y = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ եզրային պայմաններով:

► Դիցուք y^* ֆունկցիան (5.2.1)-(5.2.3) խնդրում լուծալ միևնույն է (լուծալ մաքսիմումի դեպքը քննարկվում է անալոգ ձևով): Նշանակենք

$$\delta I_i(y^*, h) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{I_i(y^* + \alpha h) - I_i(y^*)}{\alpha} :$$

Նեշտ է ցույց տալ, որ

$$\delta I_i(y^*, h) = \int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{d}{dx} f'_{iy'} + f'_{iy} \right) h(x) dx, \quad i \in [0 : m] :$$

Այսպեղից հեարևում է, որ $\delta I_i(y^*, h)$ ֆունկցիոնալը h -ի նկարմամբ գծային է: Դիտարկենք հեարևյալ գծային օպերատորը.

$$A : C_0^1 \rightarrow R^{m+1},$$

$$Ah \equiv (\delta I_0(y^*, h), \delta I_1(y^*, h), \dots, \delta I_m(y^*, h)) :$$

ImA -ով նշանակենք A օպերատորի պարկերը: Ննարավոր է երկու դեպք.

$$1) \quad ImA \subset R^{m+1},$$

$$2) \operatorname{Im} A = R^{m+1} :$$

Առաջին դեպքում $\operatorname{Im} A$ -ը R^{m+1} -ի սեփական ենթափարածությունն է: Ներկայացնում ենք $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m+1})$ վեկտոր, որը ուղղահայաց է այդ ենթափարածությանը, այսինքն՝

$$(\lambda, Ah) = 0 \Rightarrow \lambda_0 \delta I_0(y^*, h) + \dots + \lambda_m \delta I_m(y^*, h) = 0$$

$$\forall h \in C_0^1 :$$

Այսպետից կստանանք

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{d}{dx} L'_{y'} + L'_y \right) h(x) dx = 0 \quad \forall h \in C_0^1 : \quad (5.2.2)$$

Ինչպես պարզագույն խնդրում, այսպեղ նույնպես կարելի է ցույց փակել, որ (5.2.2)-ից հետևում է, որ

$$-\frac{d}{dx} L'_{y'} + L'_y = 0 :$$

Դիֆարենցիալ երկրորդ դեպքը: Դիցուք $\{e_0, \dots, e_m\}$ համակարգը բազիս է կազմում R^{m+1} փարածությունում: Ընտրենք h^0, h_1, \dots, h_m ֆունկցիաները այնպիսին, որ

$$\delta I_j(y^*, h_i) = \begin{cases} 1, & \text{երբ } i = j; \\ 0, & \text{երբ } i \neq j: \end{cases}$$

Կազմենք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \varphi_0(\beta_0, \dots, \beta_m) \equiv I_0(y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j h_j) = I_0(y^*) - \varepsilon, \\ \varphi_i(\beta_0, \dots, \beta_m) \equiv I_i(y^* + \sum_{j=0}^m \beta_j h_j) = \alpha_i, \quad i \in [1 : m] : \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Այս համակարգում ε -ը պարամետր է: Ունենք

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j}(0) = \delta I_i(y^*, h_j) :$$

Այսպեղից հետևում է, որ (5.2.3) համակարգը բավարարում է հակադարձ արտապատկերումների մասին թեորեմի բոլոր պայմաններին (տես, օրինակ՝ [2], էջ 31): Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի վեկտոր ֆունկցիա՝ $\beta(\varepsilon) \equiv (\beta_0(\varepsilon), \dots, \beta_m(\varepsilon))$, որ որոշված են գրո կետի ինչ որ մի շրջակայքում, այնպիսին, որ այդ շրջակայքում նա բավարարում է (5.2.3) համակարգին և $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$, երբ $\varepsilon \rightarrow 0$: Ներկայացրեք, եթե ε պարամետրը դրական է, ապա կստանանք հակասություն, քանի որ y^* -ը (5.2.1) խնդրի լոկալ մինիմումի կետ է:



Օրինակ (Էյլերի հավասարման լուծումը իզոպերի-մետրիկ խնդրում գլոբալ մինիմումի կետ է):

$$I_0(y) = \int_0^1 (y')^2 \rightarrow \min,$$

$$I_1(y) = \int_0^1 y \, dx = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 :$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L = \lambda_0 (y')^2 + \lambda_1 y :$$

Էյլերի հավասարումը այս ֆունկցիայի համար հետևյալն է.

$$-\frac{d}{dx} L'_{y'} + L'_y = 0 \Rightarrow -2\lambda_0 y'' + \lambda_1 = 0 :$$

Եթե $\lambda_0 = 0$, ապա $\lambda_1 = 0$ և Լագրանժի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի: Այդ դեպքում թույլատրելի էքստրեմալներ չկան: Էյլերի հավասարման մեջ փեղադրենք $\lambda_0 = 1$: Այդ դեպքում այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ ֆունկցիան: C_1, C_2, C_3 անորոշ գործակիցները որոշենք եզրային և իզոպերիմետրիայի հեղեյալ պայմաններից.

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0, \\ y(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1, \\ \int_0^1 y dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 (C_1 x^2 + C_2 x) dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1/3 + C_2/2 = 0 : \end{cases}$$

Այսպետից կստանանք միակ թույլատրելի էքստրեմալը՝

$$y^*(x) = 3x^2 - 2x :$$

Ապացուցենք, որ այն գլոբալ մինիմումի կետ է: Դիցուք $y(\cdot)$ թույլատրելի ֆունկցիա է: Այդ դեպքում

$$y(\cdot) - y^*(\cdot) = h(\cdot) \in C_0^1[0, 1] \text{ և } \int_0^1 h dx = 0 :$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} I_0(y(\cdot)) - I_0(y^*(\cdot)) &= \int_0^1 ((y^*)' + h')^2 dx - \int_0^1 ((y^*)')^2 dx = \\ &= \int_0^1 2(y^*)' h dx + \int_0^1 (h')^2 dx \geq 2 \int_0^1 (y^*)' h' dx : \end{aligned}$$

Կարարելով մասերով ինտեգրում՝ կարանանք

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y^*)' h' dx &= \int_0^1 (y^*) dh = y^* h \Big|_0^1 - \int_0^1 (y^*)'' h dx = \\ &= -6 \int_0^1 h dx = 0 : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$I_0(y^*(\cdot)) \geq I_0(y^*(\cdot))$$

ցանկացած թույլատրելի $y(\cdot)$ ֆունկցիայի համար:

Օրինակ (Դիդոնայի խնդիրը մաքսիմալ մակերեսով սեղանակերպի մասին):

Տրված է $f(x)$ ֆունկցիան $[-x_0, x_0]$ հատվածի վրա: Գրաֆիկը ներկայացնող կորի երկարությունը հաստատուն է: Գտնել գրաֆիկի փեսքը այնպես, որ կորագիծ սեղանի մակերեսը լինի մեծագույն:

Այս խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$\int_{-x_0}^{x_0} y(x) dx \rightarrow \max,$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l, y(-x_0) = y(x_0) = 0 :$$

Լուծում: Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(y, y', \lambda) = \lambda_0 y + \lambda_1 \sqrt{1 + (y')^2} :$$

Քանի, որ Լագրանժի ֆունկցիան բացահայտ կախված չէ x փոփոխականից, ապա Էյլերի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$L - y' L'_{y'} = C \Rightarrow \lambda_0 y - C = \frac{-\lambda_1}{\sqrt{1 + (y')^2}} : \quad (5.2.4)$$

Այսպեսդից հետևում է, որ եթե $\lambda_0 = 0$, ապա կամ $\lambda_1 = 0$, կամ $y' = 0$:

Առաջին դեպքը հնարավոր չէ, որովհետև Լագրանժի գործակիցները միաժամանակ զրո լինել չեն կարող: Երկրորդ դեպքում, հաշվի առնելով եզրային և իզոպերիմետրայի պայմանները, կունենանք

$$y^*(x) \equiv 0, \quad l = 2x_0 :$$

Եթե $\lambda_0 = 1$, ապա նշանակելով $y' = t \operatorname{tg} t$, (5.2.4)-ից կստանանք՝

$$y(t) - C = -\lambda_1 \cos t : \quad (5.2.5)$$

Մյուս կողմից, ունենք

$$\frac{dy}{dx} = t \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dy}{t \operatorname{tg} t} \Rightarrow x(t) - C_1 = \lambda_1 \sin t : \quad (5.2.6)$$

(5.2.5)-(5.2.6) հավասարություններից հետևում է, որ

$$(x - C_1)^2 + (y - C)^2 = \lambda_1^2 :$$

Եզրային պայմաններից ստանում ենք, որ $C_1 = 0$: Այսպիսով, եթե $l < 2x_0$, ապա խնդիրը լուծում չունի: Եթե $l = 2x_0$, ապա $y^*(x) \equiv 0$: Եթե $l > 2x_0$ և խնդիրը ունի օպտիմալ լուծում, ապա նրա գրաֆիկը

պետք է ունենա շրջանագծային աղեղի փեսք: Այդ շրջանագիծը անցնում է $(-x_0, 0)$ և $(x_0, 0)$ կետերով, իսկ նրա կենտրոնը գտնվում է OY առանցքի վրա: Կարելի է ցույց փայլ, որ եթե $l > \pi x_0$, ապա խնդիրը օպտիմալ լուծում չունի:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Լագրանժի գործակիցների մեթոդով լուծել վարիացիոն հաշվի հետևյալ իզոպերիմետրիկ խնդիրները:

$$\text{ա) } \int_0^1 (y')^2 dx \rightarrow \min, \int_0^1 y dx = 0, y(0) = 0, y(1) = 1 :$$

$$\text{բ) } \int_0^1 (y')^2 dx \rightarrow \min, \int_0^1 xy dx = 0, y(0) = y(1) = 0 :$$

$$\text{գ) } \int_0^\pi (y')^2 dx \rightarrow \min, \int_0^\pi y \sin x dx = 0, y(0) = y(\pi) = 1 :$$

$$\text{դ) } \int_0^\pi (y')^2 dx \rightarrow \min, \int_0^\pi y \cos x dx = \pi/2, y(0) = 1, y(\pi) = -1 :$$

$$\text{ե) } \int_0^{\pi} y \sin x \, dx \rightarrow \min, \int_0^{\pi} (y')^2 \, dx = 3\pi/2, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = \pi :$$

5.3 Վարիացիոն հաշվի դասական իզոպերիմետրիկ խնդիրը

Խնդիր: Ապացուցել, որ l երկարության կտոր առ կտոր ողորկ, պարզ հարթ փակ կորերի մեջ ամենամեծ մակերեսը զբաղեցնում է շրջանագիծը:

Լուծում: Դիցուք

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s \in [0, l]$$

կորի պարամետրական հավասարումներն են: Նաշվի առնելով փոփոխական աղեղի երկարության դիֆերենցիալի և մակերեսի հայրնի բանաձևերը՝ կարելի է գրել խնդրի հեքսյալ մաթեմատիկական ձևակերպումը.

$$S(x, y) = \int_0^l x(s) \frac{dy}{ds} \, ds \rightarrow \max, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 :$$

$x(s)$ և $y(s)$ ֆունկցիաները ներկայացնենք Ֆուրիեի շարքով՝

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{l}s + b_n \sin \frac{2\pi n}{l}s \right), \quad (5.3.1)$$

$$y(s) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{2\pi n}{l}s + d_n \sin \frac{2\pi n}{l}s \right) \quad (5.3.2) :$$

Այսպետից այս ֆունկցիաների ածանցիալների համար կունենանք հետևյալ բանաձևերը.

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\pi n}{l} a_n \sin \frac{2\pi n}{l} s + \frac{2\pi n}{l} b_n \cos \frac{2\pi n}{l} s \right), \quad (5.3.3)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\pi n}{l} c_n \sin \frac{2\pi n}{l} s + \frac{2\pi n}{l} d_n \cos \frac{2\pi n}{l} s \right) : \quad (5.3.4)$$

Նայալնի է նաև, որ եթե $\alpha_n, \beta_n, n = 0, 1, 2, \dots$ թվերը f ֆունկցիայի Փուրիեի գործակիցներն են, իսկ $\gamma_n, \delta_n, n = 0, 1, 2, \dots$ թվերը՝ φ -ի գործակիցներն են, ապա

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(s) ds = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^2 + \beta_i^2),$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(s) \varphi(s) ds = \frac{1}{2} \alpha_0 \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \gamma_n + \beta_n \delta_n) :$$

Այսպետից, նկատի ունենալով նաև (5.3.3)-(5.3.4) բանաձևերը, հարթ պարկերի սակերեսի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) : \quad (5.3.5)$$

Քանի որ

$$\int_0^l \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) ds = l,$$

ապա, հաշվի առնելով նաև ածանցիալների (5.3.3)-(5.3.5) բանաձևերը, կստանանք, որ կորի l երկարությունը պետք է բավարարի հետևյալ հավասարմանը.

$$l = \frac{2\pi^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) : \quad (5.3.6)$$

Մակերեսի (5.3.5) և կորի երկարության (5.3.6) բանաձևերից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{4\pi} - S &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + \\ &+ (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)) \geq 0 : \quad (5.3.7) \end{aligned}$$

Այսպիսով ստացանք հանիրահայտ հետևյալ իզոպերիմետրիկ անհավասարությունը.

$$S \leq \frac{l^2}{4\pi} :$$

Պարզ է, որ (5.3.7) անհավասարությունը կվերածվի հավասարության, երբ

$$\begin{aligned} a_1 = d_1, \quad b_1 + c_1 = 0, \quad a_n = b_n = c_n = d_n = 0, \\ n = 2, 3, \dots : \end{aligned}$$

Այսպետից

$$x = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos s + b_1 \sin s,$$

$$y = \frac{1}{2}c_0 - b_1 \cos s + a_1 \sin s,$$

այսինքն`

$$\left(x - \frac{1}{2}a_0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}c_0\right)^2 = a_1^2 + b_1^2 = \frac{l^2}{4\pi} :$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դիցուք ունենք երկու ուռուցիկ քառանկյուններ, որոնց կողերի երկարությունները միևնույն a, b, c, d թվերն են: Ենթադրենք նրանցից մեկին կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Ապացուցել, որ նրա մակերեսը մեծ է կամ հավասար մյուս քառանկյան մակերեսից:
2. Տրված պարագծով ուռուցիկ n -անկյուն բազմանկյունների մեջ գտնել այն բազմանկյունը, որի մակերեսն ամենամեծն է:
3. Տրված շրջանին ներգծել ամենամեծ մակերեսով n -անկյուն բազմանկյուն:
4. Դիտարկենք l երկարությամբ բոլոր այն հարթ ողորկ կորերը, որոնց A սկզբնակետը և B վերջնակետը գտնվում են հարթության փրված L ուղղի վրա, իսկ կորերը ընկած են L ուղղի միևնույն կիսահարթության մեջ (փարբեր կորերի համար A և B կետերը կարող են լինել փարբեր): Գտնել այն կորը, որով և $[A, B]$ հափվածով սահմանափակված պարկերի մակերեսը լինի մեծագույն:

5.4 Էքսպրեմումի բավարար պայմանները վարիացիոն հաշվի խնդիրներում

Այժմ բերենք վարիացիոն հաշվի պարզագույն խընդրի օրինակ, ըստ որի Էյլերի հավասարումը ունի միակ

լուծում, որը էքստրեմում չէ: Այսինքն՝ Էյլերի հավասարումը էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայման է:

Դիփարկենք հետևյալ խնդիրը.

$$I(y) \equiv \int_0^{3\pi/2} ((y')^2 - y^2) dx \rightarrow \min, \quad y(0) = y(3\pi/2) = 0 :$$

Էյլերի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը.

$$y'' + y = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x :$$

Նաշվի առնելով խնդրի եզրային պայմանները՝ կստանանք $y^*(x) \equiv 0$: Դիփարկենք ֆունկցիաների

$$y_n(x) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$$

հաջորդականությունը: Ակնհայտ է, որ այս ֆունկցիաները թույլատրելի են և

$$y_n(\cdot) \xrightarrow{C^1} y^*(\cdot) :$$

Մյուս կողմից ունենք

$$I(y_n) = -\frac{5\pi}{n^2} < 0 = I(y^*),$$

այսինքն y^* -ը լոկալ մինիմումի կեպ չէ:

Այժմ բերենք բավարար մի պայման, որով ստուգվում է, թե երբ Էյլերի հավասարման լուծումը կլինի լոկալ մինիմումի կեպ: Դիցուք $y^*(x)$ -ը վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդրի Էյլերի հավասարման լուծում է: Նշանակենք

$$P(x) \equiv L''_{y'y'}(x, y^*(x), (y^*(x))'),$$

$$Q(x) = -\frac{d}{dx}L''_{yy'}(x, y^*(x), (y^*(x))') + \\ + L''_{yy}(x, y^*(x), (y^*(x))') :$$

Կազմենք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը, որը կոչվում է Յակոբիի հավասարում.

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{dh}{dx}\right) - Qh = 0 : \quad (5.4.1)$$

Դիցուք $y^*(x)$ էքստրեմալը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

- $y^*(x)$ -ը բավարարում է **Յակոբիի պայմանին**, եթե (5.4.1) հավասարումը սկզբնական $h(x_0) = 0$ պայմանով ունի ոչ փրիվիալ այնպիսի $h(x)$ լուծում, որ

$$h(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1] :$$

- $y^*(x)$ -ը բավարարում է **Լեժանդրի պայմանին**, եթե

$$P(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1] :$$

Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը (տես, օրինակ՝ [1-2]):

Թեորեմ 5.4.1: *Դիցուք $y^*(x)$ -ը (5.1.1) վարիացիոն հաշվի պարզագույն խնդրի Էյլերի հավասարման լուծումն է և բավարարվում են Յակոբիի և Լեժանդրի պայմանները:*

Այդ դեպքում $y^(x)$ -ը (5.1.1) խնդրում լոկալ մինիմումի կեր է:*

Օրինակ (Կարճագույն ճանապարհի խնդիրը):

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 : \quad (5.4.2)$$

Լուծում: Քանի որ այստեղ L ֆունկցիան բացահայտ կախված չէ x փոփոխականից, ապա Էյլերի հավասարումը ունի հեփևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} L - y' L'_{y'} = C &\Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 : \end{aligned}$$

Նաշվի առնելով (5.4.2) եզրային պայմանները՝ կստանանք $y^*(x) = x$: Ստուգենք Յակոբիի պայմանը՝ Ունենք

$$\begin{aligned} Q(x) &= L''_{yy} - \frac{d}{dx} L''_{yy'} \equiv 0, \\ P(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + ((y^*)')^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \end{aligned}$$

Յակոբիի հավասարումը ունի հեփևյալ տեսքը.

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = 0 :$$

Այստեղից հեփևում է, որ

$$h(x) = C_1 x + C_2 :$$

Ուստի $h(x) = C_1 x$, $C_1 \neq 0$ ֆունկցիան $h(0) = 0$ սկզբնական պայմանով Յակոբիի հավասարման ոչ

տրիվիալ լուծում է, որը զրո չի դառնում $(0, 1]$ կիսաբաց միջակայքի ոչ մի կետում: Ներևաբար, Յակոբիի բավարար պայմանը տեղի ունի: Լեժանդրի պայմանը նույնպես տեղի ունի, քանի որ $P(x) \equiv 1/2\sqrt{2} > 0$: Այսպիսով, $y^*(x) = x$ ֆունկցիան կարճագույն ճանապարհի խնդրի լուծումն է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Օգտագործելով Յակոբիի և Լեժանդրի պայմանները՝ լուծել վարիացիոն հաշվի հետևյալ խնդիրները:

$$\text{ա) } \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(\pi/2) = 1 :$$

$$\text{բ) } \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2 + 4y \cos x) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(\pi/2) = \pi/2 :$$

$$\text{գ) } \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 4y \operatorname{sh}(x)) dx \rightarrow \min, y(0) = -1, y(1) = 0 :$$

$$\text{դ) } \int_0^{\pi/2} ((y')^2 - 4y^2) dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(\pi/4) = 1 :$$

$$\text{ե) } \int_0^{\pi/2} (y^2 - 2(y')^2 + 2y) dx \rightarrow \min, y(0) = y(\pi/2) = 0 :$$

Գրականության

- [1] **В.М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин**, Оптимальное управление, Наука, М., 1979.
- [2] **В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров**, Сборник задач по оптимизации, Наук, М., 1984.
- [3] **И. Л. Акулич**, Математические программирование в примерах и задачах, Высшая школа, М., 1986.
- [4] **Ф. П. Васильев**, Численные методы решения экстремальных задач, Наука, М., 1980.
- [5] **Е.С. Половинкин Е.С., М. В. Балашов**, Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа, физматлит, М., 2004.
- [6] **А. В. Пантелеев, Т.А. Летова**, Методы оптимизации в примерах и задачах, Высшая школа, М., 2002.
- [7] **Б.Н. Пшеничный**, Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Наука, М., 1980.

- [8] **А. Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федеров**, Курс методов оптимизации, Наука, М., 1986.
- [9] **К. Лейхтвейс**, Выпуклые множества, Наука, М., 1985.
- [10] **В. В. Воеводин**, Линейная алгебра, Наука, М., 1987.
- [11] **R.T. Rockafellar , J.B. Roger**, Variational Analisis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [12] **Վ. Ավերիսյան, Մ. Պողոսյան**, Վարիացիոն հաշիվ և օպտիմալ կառավարում (դասախոսություններ), ԵՊՏ հրատ., Երևան, 2008:
- [13] **Վ. Ռ. Բարսեղյան**, Վարիացիոն հաշիվ, ԵՊՏ հրատ., Երևան, 2011:

ՌԱՖԻԿ ԱՂԱՍՈՒ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՅԻ
ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ՌԻՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱԼԿ

Համակարգչային ձևավորող՝ Ռ. Ա. Խաչատրյան
Կազմի ձևավորող՝ Ա. Պատվականյան
Հրատ. սրբագրող՝ Լ. Շ. Հովհաննիսյան

Չափսը՝ 60x84^{1/16}: 8.375 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն

ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1



ՎՐԱՏԱՐԱԿՅՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2014