

ФГОБУВПО «ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Л.О. БАБЕШКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Рекомендовано УМО по образованию в области финансов,
учета и мировой экономики в качестве **учебного пособия**
для студентов, обучающихся по специальности
«Мировая экономика»



МОСКВА
2011

УДК 330.4:51(075.8)

ББК 65.050я73

Б12

Рецензенты:

Е.А. Воронин, заведующий кафедрой вычислительной техники и прикладной математики Московского государственного агроинженерного университета им. В.П. Горячкина, д-р техн. наук, проф.,

В.А. Бывшев, заведующий кафедрой «Математическое моделирование экономических процессов» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, д-р техн. наук, проф.,

М.С. Красс, проф. Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, д-р физ.-мат. наук

Бабешко Л.О.

Б12 Математическое моделирование финансовой деятельности : учебное пособие / Л.О. Бабешко. — М. : КНОРУС, 2011. — 224 с.

ISBN 978-5-406-01217-8

В пособии рассматриваются математические методы и модели финансового анализа. Особое внимание уделяется методам финансовой математики и их приложениям к решению задач внешнеэкономической международной финансовой деятельности, анализу потоков платежей, основанному на вычислении их обобщающих числовых характеристик, позволяющих лучше понять механизм долгосрочных финансовых операций. Приводятся модели оценки основных финансовых инструментов, теоретической базой которых служат потоки платежей. Излагаются элементы портфельной теории. В пособие включены финансовые приложения эконометрических моделей — финансовая эконометрика: модели формирования доходностей ценных бумаг, моделирование динамики финансовых показателей, модели прогнозирования тарифных ставок.

Для студентов экономических специальностей. Можно использовать также при изучении соответствующих курсов в магистратуре и аспирантуре.

УДК 330.4:51(075.8)

ББК 65.050я73

Бабешко Людмила Олеговна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.006828.04.10 от 28.04.2010 г.

Изд. № 3446. Формат 60×90/16.

Гарнитура «PetersburgС». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 9,3. Тираж 500 экз. Заказ № 512.

ООО «Издательство КноРус».

129110, Москва, ул. Большая Переяславская, 46, стр. 7.

Тел.: (495) 680-7254, 680-0671, 680-1278.

E-mail: office@knorus.ru <http://www.knorus.ru>

Отпечатано в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».

170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46. ☒

ISBN 978-5-406-01217-8

© Бабешко Л.О., 2011

© ООО «Издательство КноРус», 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Методы и модели финансовой математики	9
1.1. Характеристики финансовых операций	9
1.2. Операция наращения	11
1.3. Операция дисконтирования	16
1.4. Непрерывная процентная ставка	17
1.5. Эффективная процентная ставка	19
1.6. Конверсия валюты и наращение процентов	21
1.7. Наращение процентов и налоги	28
1.8. Наращение процентов и инфляция	31
1.9. Моделирование динамики внешнего долга с учетом инфляции и конверсии	37
Упражнения к главе 1	46
Глава 2. Анализ потоков платежей	49
2.1. Нарощенная сумма потока платежей	50
2.2. Современная стоимость потока платежей	55
2.3. Анализ произвольного потока платежей	58
2.4. Вычисление эффективной ставки методом последовательных приближений	60
Упражнения к главе 2	63
Глава 3. Модели оценки основных финансовых инструментов фондового рынка	65
3.1. Модели оценки облигаций	65
3.2. Модели оценки акций	77
Упражнения к главе 3	86
Глава 4. Модели формирования оптимального портфеля ценных бумаг	88
4.1. Вероятностные характеристики доходности ценных бумаг	88
4.2. Вероятностные характеристики портфеля	93
4.3. Определение оптимальной структуры рискованного портфеля. Модель Марковица	98
4.4. Определение оптимальной структуры комбинированного портфеля. Модель Тобина	104
Упражнения к главе 4	108
Глава 5. Равновесие на конкурентном финансовом рынке	111
5.1. Модель ценообразования на рынке капиталовложений (CAPM)	111

5.2. Цены равновесия на конкурентном рынке	117
Упражнения к главе 5	124
Глава 6. Моделирование динамики финансовых показателей	126
6.1. Модель авторегрессии AP (p) (AR(p) auto-regressive)	129
6.2. Модель скользящего среднего СС(q)	138
6.3. Смешанные модели авторегрессии – скользящего среднего АРСС (p, q)	144
6.4. Модели нестационарных временных рядов с конечным числом параметров	148
6.5. Прогнозирование курсов валют в рамках модели экономического броуновского движения (ЭБД)	153
6.6. Взаимосвязь модели АРПСС (0, 1, 1) с моделью экспоненциального сглаживания	157
6.7. Адаптивная модель прогнозирования курсов валют в рамках модели ЭВСС	159
6.8. Авторегрессионная условная гетероскедастичность (ARCH – Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)	162
Упражнения к главе 6	170
Глава 7. Математическое моделирование финансовой деятельности в страховых компаниях	172
7.1. Модель страхования с одинаковыми страховыми суммами	173
7.2. Модель страхования с различными страховыми суммами и частичными убытками	182
7.3. Модель страхования нескольких рисков	189
7.4. Модели прогнозирования значений тарифной ставки	194
7.5. Модели распределения случайных величин, связанных с потоком исков	202
Упражнения к главе 7	215
Заключение	218
Приложение	219
Литература	225

ПРЕДИСЛОВИЕ

Анализ любой финансовой деятельности, в том числе и внешнеэкономической, выполняется при помощи математических методов и моделей финансового анализа. Основу математических методов финансового анализа составляют методы финансовой математики, позволяющие принимать оптимальные финансовые решения: учитывать влияние изменений обменных курсов, темпа инфляции, разницы в процентных ставках и т.д. Первая глава пособия посвящена основным методам финансовой математики и их приложениям к решению задач внешнеэкономической международной финансовой деятельности.

Современные финансовые операции обычно осуществляются не отдельными платежами, а некоторой их последовательностью во времени — потоком платежей. Таковы, например, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплата пенсий, дивидендов и т.д. Потоки платежей применяются при расчетах по внешнеэкономическим займам и кредитам. Обобщающие количественные характеристики потоков платежей (наращенная сумма, современная стоимость) позволяют лучше понять механизм долгосрочных финансовых операций. Анализ потоков платежей изложен во второй главе.

В условиях рыночной экономики фондовый рынок приобретает ведущее значение в системе финансовых рынков. Процессы секьюритизации в той или иной степени затронули большинство стран мира, а финансовые операции, связанные с ценными бумагами, имеют высокую степень риска. Неопределенность эффективности операций на фондовых рынках требует привлечения аппарата оценивания количественных характеристик финансовых инструментов. В третьей главе рассмотрены детерминированные модели оценки финансовых инструментов фондовых рынков (облигаций, акций), основанные на методах финансовой математики.

Одним из важнейших результатов современной теории инвестиций по праву считается портфельная теория Гарри Марковица. В его фундаментальной работе «Выбор портфеля» проблема редуцирования

риска при составлении портфеля ценных бумаг решена путем диверсификации с привлечением вероятностного анализа, называемого mean-variance analysis (средне-дисперсионный анализ). «Теория Марковица — это первая значительная проба сил вероятностно-статистических методов с целью минимизации неизбежного экономического и финансового риска путем рационального составления портфеля ценных бумаг» [12. С. 86]. Дальнейшее обобщение портфельной теории принадлежит Джеймсу Тобину, который занимался анализом комбинированных портфелей, включающих как рисковые, так и безрисковые ценные бумаги. Тобин установил, что структура рисковей части комбинированного портфеля не зависит от склонности инвестора к риску, а зависит только от вероятностных характеристик ценных бумаг, включенных в него. Моделям формирования оптимальной структуры портфеля ценных бумаг посвящена четвертая глава.

Имея одинаковую информацию о характеристиках ценных бумаг, рациональные инвесторы формируют портфели с одинаковой структурой его рисковей части. Этот важнейший вывод был положен в основу одной из равновесных моделей формирования доходностей ценных бумаг — модели CAPM (Capital Asset Pricing Model), автором которой является У. Шарп. Основная предпосылка модели Шарпа состоит в том, что на формирование доходности оказывает влияние только систематический (а не «общий», как в портфельной теории) риск, поскольку несистематический риск (специфический для каждой ценной бумаги) хорошо диверсифицируется в условиях равновесного состояния рынка. В качестве меры систематического риска Шарп предложил использовать «бета» коэффициент, являющийся экзогенным параметром в модели CAPM и определяемый при помощи регрессионной модели в зависимости от рыночной доходности. Вопросы редуцирования риска в рамках моделей ценообразования финансовых активов CAPM и равновесных цен в условиях неопределенности изложены в пятой главе.

При моделировании динамики финансовых показателей широкое применение нашли модели временных рядов. Примерами временных рядов могут быть финансовые индексы, ежедневные курсы валют, котировки акций, годовые объемы продаж, деловая активность и т.д., т.е. переменные, значения которых изменяются со временем. Наибольшую популярность среди моделей временных рядов нашли линейные модели (авторегрессионные, скользящего среднего, авторегрессионскользящего среднего), что объясняется их простотой и высокой степенью аппроксимации широкого класса стационарных временных рядов при небольшом числе параметров. У большинства финансовых

показателей динамика представляет собой нестационарный случайный процесс, поэтому в шестой главе пособия рассмотрены модели стационарных и нестационарных временных рядов, разработанные Дж. Боксом и Г. Дженкинсом. Современные модели прогнозирования временных рядов цен финансовых активов, их доходностей, значений логарифмической прибыли — модели семейства ARCH (авторегрессионной условной гетероскедастичности) — базируются на учете различия между безусловными (постоянными) и условными моментами второго порядка (зависящими от прошлых состояний и развивающихся во времени). Как показывает практика, эффекты ARCH обнаружены у курсов акций, курсов валют, характеристик инфляции, т.е. у показателей, которые описывают процессы, на формирование которых существенно влияет краткосрочный ажиотажный спрос, возникающий при повышении цен и ожидании их дальнейшего роста [6]. Появление моделей типа ARCH связано с желанием дать объяснение таким свойствам временных рядов цен финансовых инструментов, как «кластерность» (группировки «больших» и «малых» значений), наличие «тяжелых хвостов» и т.д.

«Тяжелые хвосты» в распределениях рыночных цен связаны с выбросами — значительными отклонениями цен, которые происходят чаще, чем это определено нормальным законом распределения. Гистограммы цен активов, как правило, отличаются от гистограммы нормального распределения. В области нулевых значений нормальное распределение более вытянуто вверх, в области средних значений и на «хвостах» — имеет меньшую вероятность, чем в реальности.

Дисперсия случайного возмущения, уточненная в рамках моделей типа ARCH, позволяет уточнить границы доверительных интервалов при построении прогнозов значений уровней временных рядов. В разделе 6.8 приводятся примеры моделей ARCH и GARCH.

Седьмая глава пособия посвящена математическому моделированию финансовой деятельности в страховых компаниях. В последнее время в России страхование становится одним из наиболее перспективных видов экономической деятельности. Поэтому задачи, связанные с оценкой состояния страховой компании, вероятности разорения, величины резервного фонда, нетто- и брутто-премий, представляют практический интерес и включены в данное пособие.

Каждая из семи глав пособия состоит из теоретических основ, подробно разобранных примеров, упражнений для самостоятельной работы, вопросов для самопроверки усвоения материала. Часть упражнений предназначена для работы с электронной таблицей EXCEL.

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей, которые уже прослушали базовые курсы по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, экономико-математическому моделированию, эконометрике, информационным технологиям в экономике (знакомы с системами управления базами данных, электронной таблицей EXCEL). Его можно использовать также при изучении соответствующих курсов в магистратуре и в аспирантуре.