УДК 330.4(075)
ББК 65в631я73
Г85

Рецензенты:
С.А. Зададаев, к.ф.-м.н., доц. (Финакадемия)
А.А. Охрименко, к.э.н. (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Г85 **Гринева Н.В. Экономико-математическое моделирование: математическое моделирование микроэкономических процессов и систем**: Учебное пособие. М.: Финакадемия, 2008. 104 с.

ISBN 978-5-7942-0589-3

В учебном пособии рассматриваются теоретические вопросы экономико-математического моделирования. В нем представлено большое число микроэкономических моделей, таких, как модели потребления, производства и рыночных отношений, раскрыто решение основных типов задач, приведены задачи для самостоятельного чтения. Особое внимание уделено анализу теории потребления (функция полезности, спроса, двойственные функции, задача потребительского выбора, уравнение Слуцкого), теории производства (производственные функции, эластичность замены факторов производства).

Адресовано студентам, изучающим дисциплину "Математическое моделирование экономических процессов", может быть использовано аспирантами и преподавателями.

УДК 330.4 (075)
ББК 65в631я73

ISBN 978-5-7942-0589-3

ВВЕДЕНИЕ

Деятельность экономиста в современных условиях хозяйствования тесно связана с вопросами экономической теории и математической экономикой. Реальный объект моделирования в экономике по своей сложности превосходит многие объекты физической природы. Вместе с тем проверка адекватности экономико-математических моделей с помощью единственного критерия истины – практики затруднена, поскольку практический эксперимент зачастую связан с колоссальными затратами и поэтому не всегда возможен.

Реальные экономические процессы, протекающие в современном промышленном производстве, столь сложны и многогранны, что для их изучения необходимо привлекать целый комплекс наук – от международной экономики до кибернетики. Математическое моделирование микроэкономических явлений – мощное средство исследования.

Учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов факультета "Математические методы в экономике и анализе рисков". Дисциплина "Экономико-математическое моделирование: математическое моделирование микроэкономических процессов и систем" является федеральным компонентом.

В учебном пособии широко охватываются три темы микроэкономического анализа: теория потребления, теория производства и теория издержек. Акцент сделан на математическое моделирование: формализацию задач, расчет основных показателей, решение задач с помощью математических методов.

В теории потребления рассматриваются отношения предпочтения, функция полезности, ее виды и свойства, задача потребительского выбора и двойственная ей задача, уравнение Слуцкого, лемма Шеппарда и тождество Роя.

В теории производства ключевым понятием является производственная функция. Приводится линейная, степенная, неоклассическая производственные функции. Подробно рассматриваются их свойства, предельная норма замещения факторов производства, эластичность замены факторов.

В разделе теории издержек производства подробно рассматриваются короткий и длительный периоды производства. Здесь вы найдете ответы на вопросы: какие издержки существуют, как их определять, каким образом они взаимосвязаны между собой. Весь материал подробно иллюстрирован.

1. ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ

1.1. Отношения предпочтения и функция полезности

В этой части обратимся к общей модели экономики, берущей свое начало от Вальраса и получившей развитие в более поздних исследованиях. В качестве одной из компонент модели Вальраса выступает отдельный потребитель, который, располагая определенным доходом, тратит его на приобретение желаемого набора товаров. Математическая экономика исследует проблему потребительского спроса с абстрактной точки зрения, делая лишь самые общие предположения об индивидуальных свойствах и предпочтении потребителя.

В ранних исследованиях по теории спроса (конец XX в.), носившей название "теория полезности", основное внимание уделялось малосущественным вопросам, таким, как предельная полезность (т.е. величина дополнительного эффекта для потребителя от дополнительной единицы какого-либо товара), за что эта теория справедливо подвергалась критике. Впоследствии эта теория освободилась от связывающих ее ограничений и превратилась в современную теорию потребительского спроса.

В теории полезности предполагается, что поведение человека рационально, а именно, что его выбор основывается на знании полезных свойств товаров и умении сопоставлять и соизмерять эти полезные свойства. Предпосылка кажется естественной, если речь идет о небольшом перечне хорошо известных потребителю товаров. Если же количество товаров становится необозримым и при этом возрастает доля товаров с не проверенными долгой практикой свойствами, то указанное предположение о способности хорошо ориентироваться в этом неизвестном море товаров вводит на самом деле в заблуждение.

Предметом изучения является поведение отдельного потребителя, рассматриваемое с точки зрения рационального распределения личного бюджета.

Пространством товаров назовем неотрицательный ортант R_+^n n-мерного векторного пространства, каждая точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которого представляет собой определенный ассортиментный набор товаров. Величина x_i показывает количество i-го товара, при выбранной единице измерения (штуки, килограммы, метры и т.д.). Пусть $X \subseteq R_+^n$ – множество, на котором определены интересы потребителя. Можно, например, считать, что X представляет собой множество всех мыслимых наборов товаров, доступных потребителю и пригодных для него. Все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество.

Пространство $X = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n\}$ является неотрицательным отртантом евклидова пространства, замкнутым и выпуклым множеством. Любые два вектора $x, y \in X$ потребитель может сравнить и сделать из них выбор. Этот выбор зависит от вкусов потребителя, его бюджета и от цен на товары.

Вначале рассмотрим поведение потребителя, свободного от бюджетных ограничений. Функция полезности соизмеряет субъективную полезность товаров и услуг. Эта функция приписывает всякому набору товаров некоторое число – его "полезность" с точки зрения некоего индивидуума. Хотя функция полезности, несомненно, весьма удобное средство формализации многих экономических задач, тем не менее предположение о существовании такой функции есть некая гипотеза, справедливость которой можно оспаривать. Представляется естественным, что всякий человек может сделать выбор между двумя любыми наборами товаров. В этом случае говорят, что тем самым на множестве X задается отношение предпочтения.

Пусть на множестве X задано бинарное отношение $\succcurlyeq$, называемое *отношением предпочтения*. Это отношение является одним из основных понятий теории потребления. Таким образом, запись $x \succcurlyeq y$, где x и y являются наборами товаров, означает, что рассматриваемый потребитель либо предпочитает набор x набору y, либо не делает между ними различий, т.е. x по крайней мере, так же хорош, как и y, согласно вкусам этого покупателя.

Делая определенные предположения о характере рассматриваемого индивидуума, потребуем выполнения следующих аксиом:

1) отношение $\succcurlyeq$ называется *рефлексивным*, если для любого набора $x \in X$

$$x \succcurlyeq x.$$

Расшифровав запись, получаем: "Каждый набор, по меньшей мере, не хуже самого себя". Следствие из аксиомы рефлексивности не является столь тривиальным и сводится к следующему: каждый набор x принадлежит, по меньшей мере, одному множеству безразличия – тому, которое содержит как минимум сам набор x;

2) отношение называется *полуупорядоченным*, если оно *транзитивно*, т.е. для трех заданных наборов $x, y, z \in X$ выполняются условия: $x \succcurlyeq y,\ y \succcurlyeq z \ \Rightarrow\ x \succcurlyeq z$, что выражает совместимость предпочтений или непротиворечивость потребительских взглядов.

В экономике набор потребителя мог бы быть нетранзитивным в условиях неопределенности и неполноты информации, однако при принятой предпосылке об отсутствии таких условий нетранзитивность выбора потребителя означала бы несогласованность, т.е. внутреннюю противоречивость его предпочтений, приводящую к возникновению абсурдных исходов;

3) отношение называется отношением *безразличия* или *эквивалентности*, если для любой пары $x, y \in X$ справедливо:

либо $x \succcurlyeq y$, либо $y \succcurlyeq x$, либо и то и другое.

Если отношение $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$ не соблюдается, считается, что $x \succ y$; если $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, будем писать $x \sim y$.

Расшифруем эту запись: либо набор x, по меньшей мере, не хуже набора либо набор y, по меньшей мере, не хуже набора x, либо набор x столь же хорош, как и набор y (потребитель считает эти наборы равноценными, т.е. не проводит между ними различий).

Подведем промежуточный итог: любой потребительский набор можно поместить в одно множество безразличия, и не более чем в одно множество безразличия.

Определение. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется *непрерывным* на X, если множество $\{(x, y) | x \succ y\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$.

Содержательно это определение означает следующее: если набор товаров x_0 строго предпочтительнее, чем набор y_0 $(x_0 \succ y_0)$, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение строгого предпочтения сохраняется, т.е., если точки x, y близки соответственно к x_0 и y_0, то $x \succ y$.

Основное удобство непрерывного отношения предпочтения заключается в том, что его можно при желании заменить, смоделировать числовой функцией.

Определение. Функция $u(x)$, определенная на множестве X, называется *функцией полезности*, соответствующей отношению предпочтения $\succcurlyeq$, если $u(x) \geq u(y)$, тогда и только тогда, когда $x \succcurlyeq y$.

Если для отношения предпочтения существует хотя бы одна функция полезности, то их существует бесконечно много. В силу этого обстоятельства и из-за невозможности предпочесть одну функцию полезности другой многие специалисты в этом вопросе избегают пользоваться такой кардинальной (числовой) измеримостью полезности, предпочитая все суждения вести на "ординалистическом" (порядковом) языке.

Определение. *Точкой насыщения* называется наиболее предпочтительный элемент $x \in X$, т.е. такой, что $x \succcurlyeq y$ для всех $y \in X$. Если X не содержит точки насыщения, то говорят, что имеет место *ненасыщаемость*.

На языке функции полезности насыщаемость означает, что функция $u(x)$ достигает своего супремума на множестве X.

Пусть $u(x)$ и K – функция полезности и соответственно капитал потребителя. Сделаем исходные предположения. Будем считать, что область определения X функции полезности совпадает с R_+^n.

1.2. Свойства функции полезности

☑ **Первое свойство.** Возрастание потребления одного продукта при неизменном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки (возрастанию функции полезности):

$$\text{если } x_1^2 > x_1^1, \text{ то } u(x_1^2, x_2, ..., x_n) > u(x_1^1, x_2, ..., x_n);$$

$$\text{если } x_2^2 > x_2^1, \text{ то } u(x_1, x_2^2, ..., x_n) > u(x_1, x_2^1, ..., x_n). \qquad (1.1)$$

Определение. Первые частные производные называются *предельными полезностями* продуктов.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = u_{x_1}' > 0 \text{ – предельная полезность первого продукта;}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = u_{x_j}' > 0 \text{ – предельная полезность } j\text{-го продукта.} \quad (1.2)$$

☑ **Второе свойство.** Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления продолжает расти при неизменном потреблении остальных. Это свойство предельной полезности называется *законом убывания предельной полезности*.

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} = u_{x_1 x_1}'' < 0, \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = u_{x_j x_j}'' < 0. \qquad (1.3)$$

Более сильное утверждение состоит в том, что при предположении, что функция полезности $u(x)$ является дважды дифференцируемой и имеет непрерывные вторые частные производные. Матрица Гессе, состоящая из вторых частных производных, отрицательно определена:

$$H = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что функция полезности строго вогнута. В частности, $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} < 0, \quad j = 1,2,\dots,n$, то есть полезность любого товара уменьшается по мере его потребления. Это допущение получило название *закона Госсена*.

☑ **Третье свойство.** Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растет количество другого потребляемого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным, поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство не столь очевидно, как свойства 1 и 2, и справедливо не для всех благ: если блага могут полностью замещать друг друга в потреблении, то свойство 3 не выполняется. Предположение 3 вводится не всегда, но оно гарантирует выпуклость вниз линий безразличия.

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial_j} = u_{x_i x_j}{}'' = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_i} = u_{x_j x_i}{}'' > 0, \qquad i \neq j. \tag{1.4}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(x_j - a_j\right)^{\alpha_j}$, при $n = 2$ и $\begin{cases} x_j \geq a_j \geq 0 \\ \alpha_j > 0 \\ j = 1,2 \end{cases}$, *рассчитать* предельные полезности каждого товара и *проверить* выполняемость свойств 2 и 3 функции полезности.

2. Для функции полезности $u(x) = x_1^{1/2} \cdot (x_2 - 1)^{1/3}$, при $x_1 = 10$ и $x_2 = 5$, *рассчитать* предельную полезность обоих благ, *проверить* выполняемость свойств 2 и 3 функции полезности.

1.3. Кривые безразличия

Определение. Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1, x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей потребителя, называется *линией безразличия*. Линии уровня есть не что иное, как линии уровней функции полезности.

Множество линий безразличия называется *картой линий безразличия*. Каждая кривая безразличия представляет собой наборы потребительских товаров и услуг, которые человек оценивает одинаково. На рис. 1 показаны три кривые безразличия, которые образуют часть карты кривых безразличия. Кривая безразличия U_3 соответствует наивысшему уровню удовлетворения потребностей, затем следует кривая безразличия U_2 и U_1.

Свойства функции полезности означают, что линия безразличия убывает (является нисходящей) и строго выпукла к началу координат. Для пояснения этого рассмотрим дифференциал функции $u(x_1, x_2)$. Если двигаться вдоль линии уровня, то приращение функции $u(x_1, x_2)$ равно нулю, и, следовательно, можно считать равной нулю его главную линейную часть. Дифференциал функции полезности описывается следующим образом:

$$du(x_1, x_2) = u_1' dx_1 + u_2' dx_2 = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1'}{u_2'} < 0\,. \tag{1.6}$$

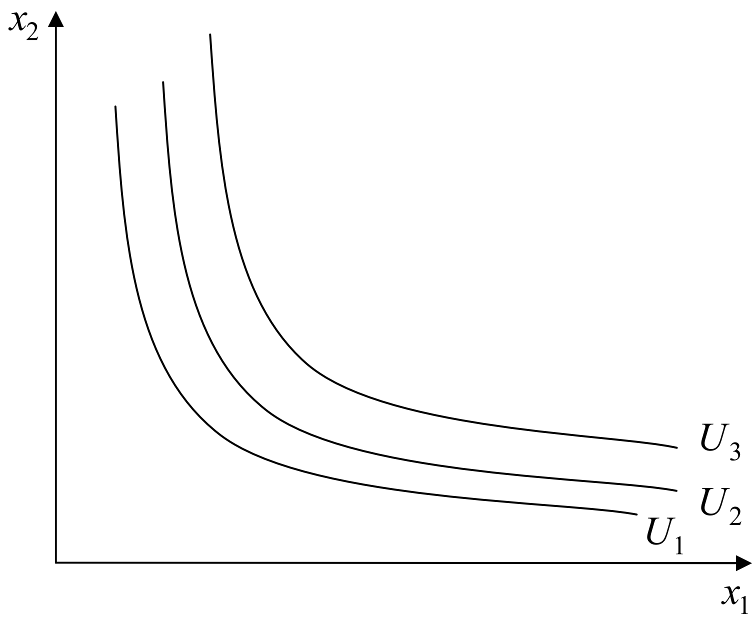


Рис. 1.1. Карта линий безразличия

Таким образом, функция $x_2(x_1)$, то есть зависимость x_2 от x_1 вдоль кривой безразличия, является убывающей, поскольку производная ее отрицательна.

Вторая производная функции $x_2(x_1)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{d\left[\dfrac{dx_2}{dx_1}\right]}{dx_1} = -\frac{u_{11}'' u_2' - u_1' u_{21}''}{(u_2')^2} > 0\,.$$

Ее положительность вытекает из свойств 1–3 функции полезности и, следовательно, кривые безразличия выпуклы вниз.

Лемма. Кривые безразличия не могут пересекаться.

Доказательство. Чтобы понять, почему, допустим обратное и увидим, что это нарушает предположение о поведении потребителя. Для доказательства рассмотрим рис. 1.2, где приведены две кривые безразличия – U_1 и U_2, которые пересекаются в точке A. Так как точки A и B находятся на кривой безразличия U_1, потребитель не будет отдавать предпочтения какой-либо из этих двух потребительских корзин. Точки A и D лежат на кривой безразличия U_2, и, следовательно, потребитель должен также одинаково оценивать обе корзины. В результате потребителю должно быть абсолютно безразлично, что выбрать: B или D. Но этого не может быть

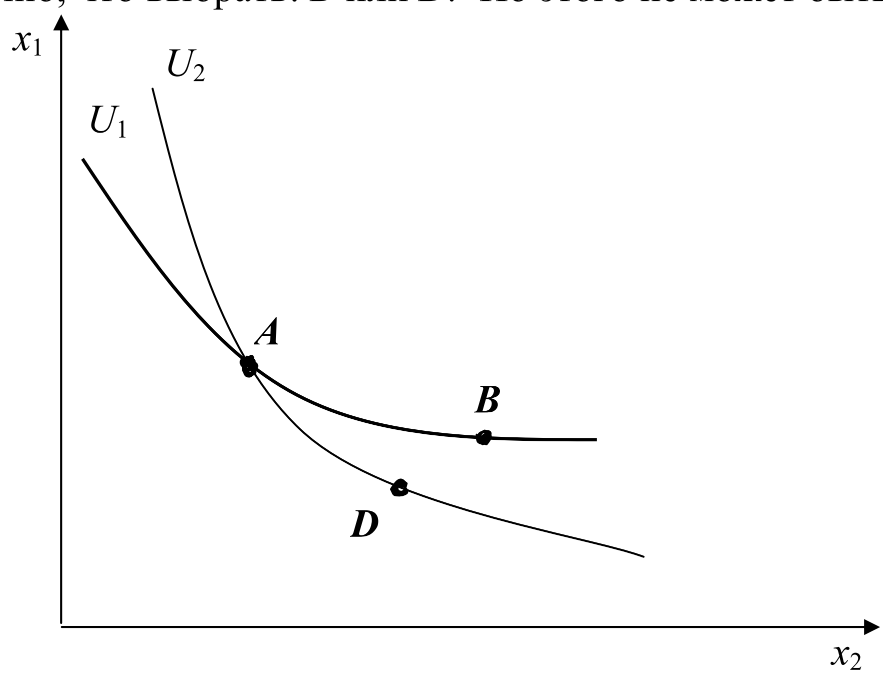


Рис. 1.2. Кривые безразличия не могут пересекаться

в действительности, так как потребительская корзина B должна быть предпочтительнее корзины D, поскольку она содержит больший набор товаров, чем D. Таким образом, предположение, что кривые безразличия пересекаются, противоречит утверждению, что большее количество товара лучше меньшего, **чтд**.

1.4. Предельная норма замещения

Количество денежных средств, которыми располагает потребитель, ограничены, поэтому он вынужден искать компромисс, когда делает выбор между двумя, тремя или большим числом товаров, и кривые безразличия могут помочь найти его. Перемещаясь вдоль кривой безразличия сверху вниз, мы видим, что потребитель готов отказаться от определенного количества единиц потребляемого товара x_1 в пользу товара x_2 (от точки *A* до точки *B*).

Чтобы количественно определить, каким объемом того или иного товара потребитель готов пожертвовать ради увеличения потребления другого товара, используется мера, называемая *предельной нормой замещения (Marginal Rati of Substitution – MRS).*

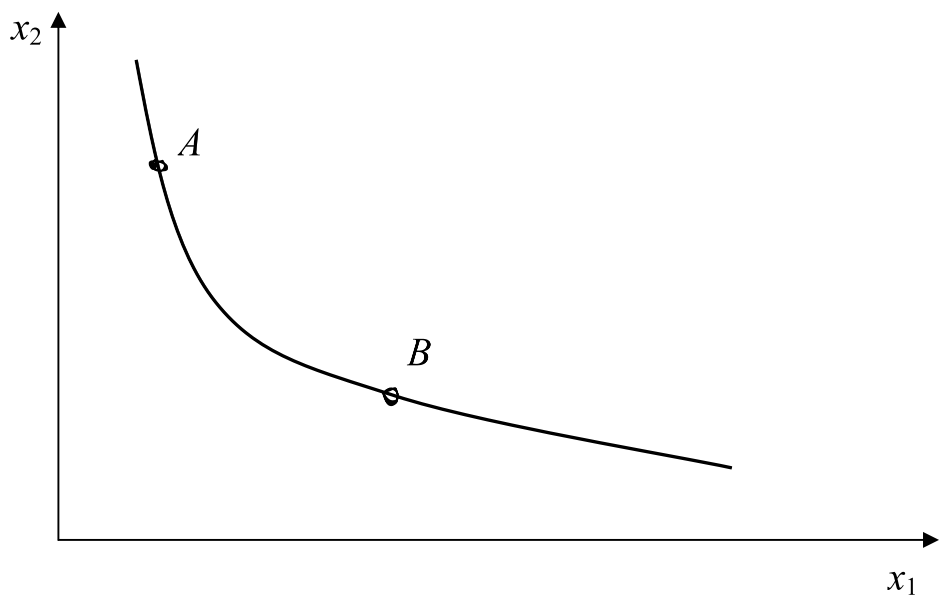


Рис. 1.3. Различие наборов на линии уровня

Рассмотрим фиксированную линию безразличия *U*. Пусть потребительский набор $(x_1, x_2) \in U$. При выполнении ряда естественных предположений (непрерывность частных производных и не равенство их нулю) справедлива, как было показано выше, следующая формула:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1'}{u_2'}.$$

Имеем приближенное равенство (рис. 1.4):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -tg\varphi \approx -tg\alpha = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \qquad (1.7)$$

Из предыдущих двух равенств следует важное приближенное равенство:

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{u_1'}{u_2'}. \qquad (1.7')$$

Отношение $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ показывает, на сколько должен индивидуум увеличить (уменьшить) потребление *второго* продукта, если он уменьшил (увеличил) потребление *первого* продукта на одну единицу без изменения уровня удовлетворения своих потребностей.

Это обстоятельство геометрически интерпретируется так: точки (x_1, x_2), $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ принадлежат одной и той же линии безразличия U (см. рис. 1.4).

Определение. Дробь $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ называется *нормой замещения (замены)* первого продукта вторым на потребительском наборе (x_1, x_2).

Определение. Производную $MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ называют *предельной нормой замещения (Marginal Rate Substitution*) первого продукта вторым.

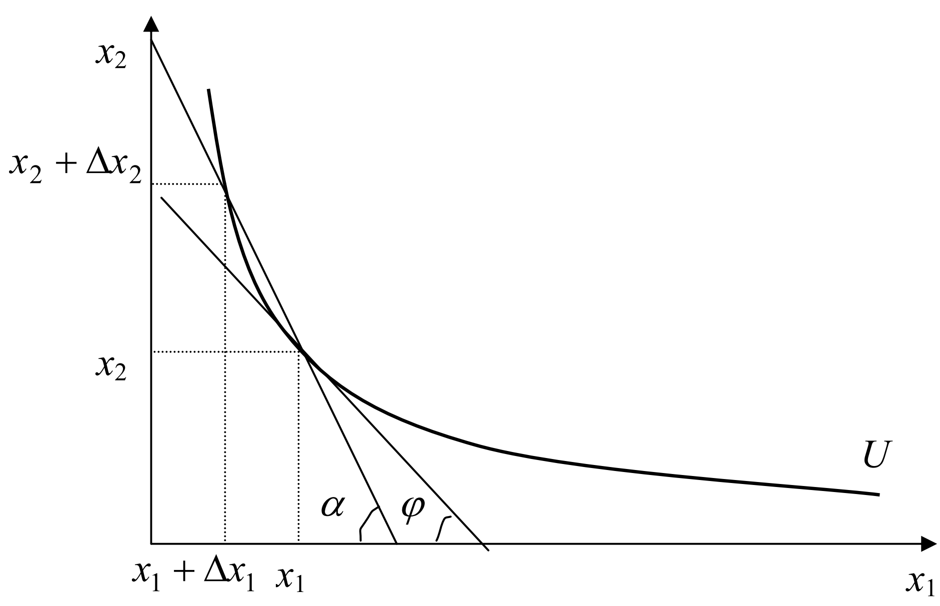


Рис. 1.4. Геометрическое представление предельной нормы замещения

Если писать через частные производные, то будет иметь место следующая формула для определения предельной нормы замещения первого продукта вторым:

$$MRS_{12} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}. \tag{1.8}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(x_j - a_j\right)^{\alpha_j}$, при $n = 2$ и $\begin{cases} x_j \geq a_j \geq 0 \\ \alpha_j > 0 \\ j = 1,2 \end{cases}$, *рассчитать* MRS_{12} и MRS_{21}.

2. Для функции полезности $u(x) = x_1^{1/2} \cdot (x_2 - 1)^{1/3}$, при $x_1 = 10$ и $x_2 = 5$, *рассчитать* MRS_{12} и MRS_{21}.

1.5. Задача потребительского выбора

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Карта безразличия описывает шкалу личных предпочтений в отношении различных сочетаний товаров и услуг. Но предпочтения не объясняют полностью поведение потребителя. На индивидуальный выбор влияют также *бюджетные ограничения*, которые при известных ценах на различные товары и услуги ограничивают потребление.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на все товары и услуги не могут превышать денежный доход. При этом вектор, состоящий из *n* цен в денежном выражении

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

где p_j – цена товара j, и денежный доход K, будут считаться заданными положительными параметрами. В таком случае бюджетное ограничение, отражающее то обстоятельство, что общий расход не может превышать доход, будет иметь вид:

$$\langle p, x \rangle \leq K \text{, т.е. } \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq K,$$

где p_jx_j – расход на приобретение товара j. Допустимым множеством для потребителя является множество X:

$$X = \left\{ x \in C \left| \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le K \right. \right\} = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le K, x \ge 0 \right. \right\},$$

т.е. не пустое компактное (замкнутое и ограниченное) выпуклое подмножество пространства товаров. Граница, вдоль которой $\langle p, x \rangle = K$, называется *бюджетной линией*. В случае $n = 2$, это – прямая, при $n = 3$ – плоскость, и в общем случае – гиперплоскость.

Таким образом, классическая задача потребительского выбора заключается в выборе такого набора x^* из допустимого множества X, который является "самым предпочтительным", т.е. для всех остальных наборов x, принадлежащих X, справедливо соотношение $x^* \succcurlyeq x$.

В терминах функции полезности задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u(x) \to \max \\ \langle p, x \rangle \le K \\ x \ge 0 \end{cases},$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le K \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_+^n \end{cases}. \tag{1.9}$$

Здесь мы имеем задачу нелинейного программирования, в которой искомыми переменными являются уровни потребления каждого из n товаров $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. В качестве целевой функции выступает функция полезности $u(x)$, которая считается непрерывно дифференцированной, и, исходя из свойств функции полезности, имеет положительные первые частные производные и отрицательно определенную матрицу Гессе вторых частных производных. Ограничением в форме неравенства является бюджетное ограничение, на котором функция ограничения линейна при заданных ценах $p = (p_1, p_2, \dots , p_n)$. Константой является доход K. В силу того, что целевая функция непрерывна, а допустимое множество компактно, по теореме Вейерштрасса решение этой задачи существует, а так как целевая функция строго вогнута и допустимое множество выпукло, то решение является единственным.

Для наглядности рассмотрим пример, где нам необходимо приобрести только два вида продукта. Тогда искомыми величинами будет вектор $x = (x_1, x_2) \in R_+^n$, при этом вектор цен $p = (p_1, p_2)$ и доход K считаются заданными. Задача потребительского выбора имеет вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le K \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}. \tag{1.10}$$

Набор $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, который является решением задачи потребительского выбора, принято называть *оптимальным* для потребителя, или *локальным рыночным равновесием* потребителя.

Заметим, что решение данной задачи не изменится, если все цены и доход увеличить (уменьшить) в одно и то же число раз λ. Это равнозначно умножению на положительное число λ обеих частей ограничения $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le K$, что дает неравенство, эквивалентное исходному. Поскольку ни цены, ни доход не входят в функцию полезности в явном виде, задача остается такая же, что и была первоначально.

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования, и для ее решения применяется теорема Лагранжа, если ограничения представлены в виде равенства, или теорема Куна–Таккера, если ограничения выражены неравенствами.

Докажем, что ограничение всегда будет выполняться как ограничения равенства. Если на каком-то потребительском наборе (x_1, x_2) бюджетное ограничение $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le K$ будет выполняться в виде строгого неравенства, то это значит, что мы можем увеличить потребление какого-либо из товаров и тем самым увеличить значение функции полезности. Следовательно, набор (x_1^*, x_2^*), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, то есть $p_1 x_1 + p_2 x_2 = K$. Графически это означает, что решение (x_1^*, x_2^*) задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой (рис. 1.5), которую удобнее всего провести через точки пересечения с осями координат, где весь доход тратится на один продукт: $\left(0, \dfrac{K}{p_2}\right)$ и $\left(\dfrac{K}{p_1}, 0\right)$.

Таким образом, если ограничение выполняется как равенство, то задача будет решаться как задача на условный экстремум с ограничением в виде равенства:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = K \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}. \qquad (1.11)$$

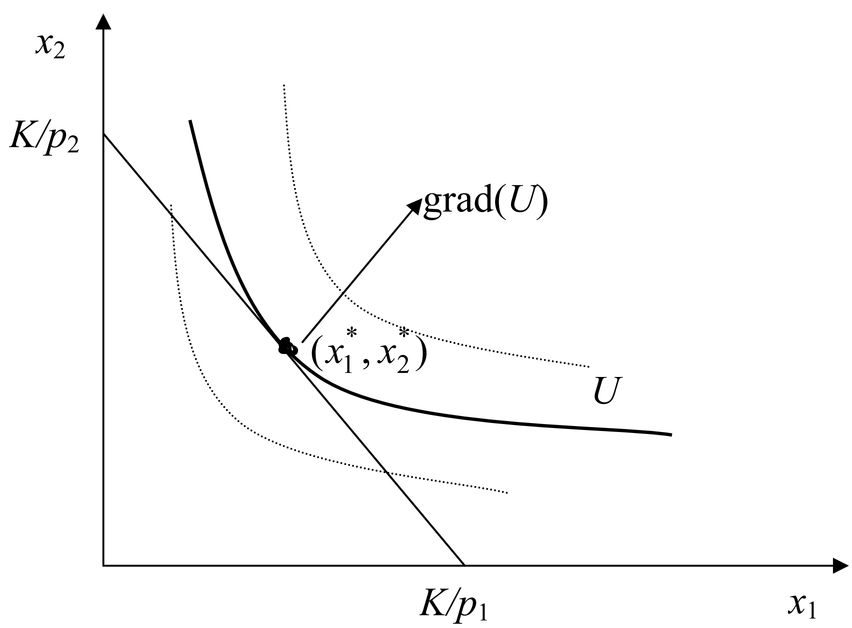


Рис. 1.5. Бюджетное ограничение и кривая безразличия

Для решения задачи составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = -u(x_1, x_2) + y(p_1 x_1 + p_2 x_2 - K),$$

где y – вектор множителей Лагранжа, в данном случае состоящий из одной координаты, т.е. он является одномерным. В соответствии с теоремой Лагранжа находим первые частные производные данной функции по искомым переменным и по введенной искусственно y, и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + yp_1 = -u_1' + yp_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} + yp_2 = -u_2' + yp_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial y} = p_1x_1 + p_2x_2 - K = 0 \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \end{cases}. \qquad (1.12)$$

Решение данной системы и даст нам решение нашей задачи. Выразив из первого и второго уравнений системы множитель Лагранжа *y:* $u_1' = yp_1, \quad u_2' = yp_2$, и, приравняв, получим систему, решение которой несложно найти:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1'}{u_2'} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = K. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Решением данной системы будет точка локального экстремума (x_1^*, x_2^*). Таким образом, в точке локального рыночного равновесия отношение частных производных функции полезности есть отношение цен:

$$\frac{u_1'(x_1^*, x_2^*)}{u_2'(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (1.14)$$

Отношение частных производных равно предельной норме замены первого продукта вторым в точке локального рыночного равновесия (x_1^*, x_2^*). Из только что изложенного следует, что данная предельная норма замены (1.14) равна отношению рыночных цен на продукты $\dfrac{p_1}{p_2}$. Данный факт играет важную роль в экономической теории.

Геометрически решение (x_1^*, x_2^*) можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1,x_2)$ с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = K$ (рис.1.5). Это определяется тем, что отношение $\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\dfrac{u_1'}{u_2'}$ показывает тангенс угла наклона линии уровня функции полезности, а отношение $-\dfrac{p_1}{p_2}$ представляет тангенс угла наклона бюджетной линии. Так как в точке локального рыночного равновесия они равны, в этой точке происходит касание данных двух линий.

Из соотношений (1.7’) и (1.14) следует, что

$$-\frac{\Delta x_2^*}{\Delta x_1^*} \approx \frac{p_1}{p_2},$$

т.е. отношение (со знаком минус) конечных (относительно небольших) изменений Δx_1^* и Δx_2^* объемов товара в точке локального рыночного равновесия (x_1^*, x_2^*) приближенно равно отношению рыночных цен.

Решение обобщенной задачи (1.9) проведем с помощью теоремы Куна–Таккера, и оно будет выглядеть следующим образом:

$$L(x, y) = u(x) + y(K - \langle p, x \rangle),$$

где y – множитель Лагранжа, и запишем условия Куна–Таккера:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} - yp \le 0,$$

$\dfrac{\partial L(x, y)}{\partial y} = K - yp \ge 0,$ и система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u(x)}{\partial x} - yp \right) \cdot x = 0 \\ y \cdot \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial y} = y\big(K - \langle p, x \rangle\big) = 0 \\ x \ge 0, \qquad y \ge 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Количество ограничений соответствует количеству переменных и, следовательно, все переменные и частные производные здесь вычисляются однозначным образом, и (x^*, y^*) – решение задачи (1.9). Таким образом, $\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \le y^* p_j$, но если строго меньше, тогда $x_j^* = 0$, $x_j^* \ge 0$, но если строго больше, тогда

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} = y^* p_j,$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, поэтому для всех закупаемых товаров справедливо соотношение (для всех $x_j^* > 0$);

$$\frac{1}{p_j}\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} = y^* \text{ для всех } j, \text{ для которых } x_j^* > 0. \qquad (1.16)$$

Отношение предельных полезностей к цене для всех закупаемых товаров должно быть одинаковым. Так как множитель Лагранжа y^* положительный, тогда из условия дополняющей нежесткости (условия Куна–Таккера) следует, что весь доход K должен быть израсходован:

$$K - \left\langle p, x^* \right\rangle = 0,$$

т.е. решение лежит на бюджетной прямой. На самом деле это следует из факта ненасыщения: если был потрачен не весь доход, то оставшуюся сумму средств можно потратить на приобретение некоторого товара и тем самым увеличить полезность.

Считается, что потребители приобретают все виды товаров и услуг (в противном случае можно уменьшить размерность пространства товаров, исключив из рассмотрения непокупаемые товары). Тогда условие (1.15) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x)}{\partial x} - yp = 0 \\ K - \langle p, x \rangle = 0 \end{cases},$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} - yp_j = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n \\ K - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = 0. \end{cases}$$

Эти условия выполняются в точке $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y^*\right)$ решения. Координаты $x_j^*,\ j = 1,2,\ldots,n$ решения задачи потребительского выбора есть функции параметров цены и дохода и называются *функциями спроса*, т.е.

$$x_j^* = x_j^*(p_1, \ldots, p_n, K), \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad (1.17)$$

или в общем виде:

$$x^* = x^*(p, K), \qquad y^* = y^*(p, K). \qquad (1.17')$$

1.6. Экономический смысл множителя Лагранжа

Рассмотрим задачу потребительского выбора в общем виде:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \\ \langle p, x \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j \le K \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R_+^n. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа и продифференцируем ее по доходу (K) в точке решения:

$$L(x, y) = -u(x) + y(K + \langle p, x \rangle),$$

$0 = -\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial K} + y^*$, следовательно,

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial K} = y^*.$$

Множитель Лагранжа y^* показывает, на сколько изменится полезность потребителя, если его доход изменится на малую единицу, то есть является *предельной полезностью денежных средств*.

Пример 1.6.1. Рассмотрим задачу потребительского выбора с двумя товарами. Пусть задана цена на товары p_1 и p_2 соответственно. Известен доход K потребителя и задана его индивидуальная функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Найти спрос на товары, который будет предъявлен потребителем, и рассчитать значение функции полезности.

Решение. Тогда, если x_1 и x_2 – количество приобретаемых благ, формализованная задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le K \\ x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Как мы выяснили, бюджетное ограничение будет выполняться как равенство, и можно решать данную задачу с помощью теоремы Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = -x_1 \cdot x_2 + y \cdot (p_1 x_1 + p_2 x_2 - K),$$

возьмем частные производные, приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial x_1} = -x_2 + y p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial x_2} = -x_1 + y p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial y} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - K = 0 \\ x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнения системы выражаем y и приравниваем выражения; получим:

$$\frac{x_2}{p_1} = \frac{x_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 p_1 = x_2 p_2 .$$

Подставив последнее равенство в третье уравнение системы, получим:

$$x_1^* = \frac{K}{2 p_1}, \qquad x_2^* = \frac{K}{2 p_2}, \qquad y^* = \frac{K}{2 p_1 p_2} .$$

Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ является вектором спроса потребителя на товары и максимизирует функцию полезности. Величина y^* показывает предельную эффективность (полезность) денежных средств. Таким образом, расход средств на каждый вид товара составляет половину общего дохода потребителя, деленный на его цену.•

В табл. 1 приведены примеры различных видов функции полезности, применяемых в теории потребления.

Таблица 1

Примеры функций полезности

Название функции полезности	**Функция полезности**	**Ограничения**
Квадратическая	$u(x) = ax + \frac{1}{2} x'Bx$	$a + x'B > 0$ B отрицательно определена
Степенная (Стоуна)	$u(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(x_j - a_j\right)^{\alpha_j}$	$\begin{cases} x_j \ge a_j \ge 0 \\ \alpha_j > 0 \\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$,

Логарифмическая (Бернулли)	$u(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j \log\left(x_j-\tilde{x}_j\right)$	$\begin{cases} a_j>0 \\ x_j>\tilde{x}_j\ge 0 \\ j=1,2,...,n \end{cases}$
С постоянной эластичностью	$u(x)=\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{1-b_j}\left(x_j-\tilde{x}_j\right)^{1-b_j}$	$\begin{cases} a_j>0 \\ 0<b_j<1 \\ x_j>\tilde{x}_j\ge 0 \\ j=1,2,...,n \end{cases}$

1.7. Функция полезности Р. Стоуна

Рассмотрим одну из представленных в табл. 1 функцию полезности – функцию потребительского предпочтения Р. Стоуна. Эта функция имеет вид:

$$u(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(x_j-a_j\right)^{\alpha_j}\to \max, \qquad (1.18)$$

где a_j – минимально необходимое количество j-го товара, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора. Для того чтобы приобрести набор $\{a_j\}$ полностью, необходимо, чтобы доход K потребителя был больше $\sum_{j=1}^{n} p_j a_j$ – количества денежных средств, необходимых для приобретения этого набора. Коэффициенты степени $\alpha_j>0$ характеризуют относительную "ценность" товара для потребителя. Добавив к целевой функции (1.18) стандартное бюджетное ограничение, получим задачу, называемую моделью Р. Стоуна:

$$\begin{cases} u(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(x_j-a_j\right)^{\alpha_j}\to \max \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le K \\ x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R_+^n. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Решение данной задачи проводится аналогично предыдущим по методу множителей Лагранжа, поэтому полностью здесь оно приводиться не будет и останется читателю для самостоятельной работы. После несложных математических выкладок получим функцию спроса:

$$x_j^* = a_j + \frac{\alpha_j\left(K - \sum_{j=1}^{n} p_j a_j\right)}{p_j \sum_{j=1}^{n} \alpha_j}. \qquad (1.20)$$

Эту функцию спроса легко интерпретировать и запомнить следующим образом. Вначале приобретается минимально необходимое количество каждого товара a_j. Затем рассчитывается сумма оставшихся денежных средств, которая распределяется пропорционально "ценностям" a_j товара. Разделив количество денег на цену p_j, получаем дополнительно приобретаемое, сверх минимума, количество j-го товара и добавляем его к a_j.

Модель Стоуна (1.19) имеет различные частные случаи, например, все $a_j = 0$, а все α_j равны между собой, тогда вместо (1.20) будем иметь:

$$x_j = \frac{K}{np_j},$$

то есть доход делится на n равных частей и спрос на j-й товар рассчитывается как частное от деления полученной суммы денежных средств на его цену.

Пример 1.7.1. Рассмотрим задачу потребительского выбора с двумя товарами. Пусть задана цена на товары p_1 и p_2 соответственно. Известен доход K потребителя, и задана его индивидуальная функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$.

Найти спрос на товары, который будет предъявлен потребителем, и рассчитать значение функции полезности.

Решение. Тогда, если x_1 и x_2 – количество приобретаемых благ, формализованная задача будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le K \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Как мы выяснили, бюджетное ограничение будет выполняться как равенство, и можно решать данную задачу с помощью теоремы Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = -x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + y \cdot (p_1 x_1 + p_2 x_2 - K),$$

возьмем частные производные, приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial x_1} = -\dfrac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} + y p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{2} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{2}} + y p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y)}{\partial y} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - K = 0 \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases}.$$

Из первого и второго уравнения системы выражаем y и приравниваем выражения, получим:

$$\frac{u_1'(x_1^*, x_2^*)}{u_2'(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2x_2^*}{3x_1^*} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{2x_2^*}{p_1} = \frac{3x_1^*}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad 3x_1^* p_1 = 2x_2^* p_2,$$

$$x_2^* = \frac{3x_1^* p_1}{p_2}.$$

Подставив последнее равенство в третье уравнение системы, получим:

$$x_1^* = \frac{2K}{5p_1}, \qquad x_2^* = \frac{3K}{5p_2}. \tag{1.22}$$

Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ является вектором спроса потребителя на товары и максимизирует функцию полезности. •

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(x_j-a_j\right)^{\alpha_j}$, $n=2$ и $\begin{cases} x_j \ge a_j \ge 0 \\ \alpha_j > 0 \\ j=1{,}2 \end{cases}$ при векторе цен $p=(5{,}10)$ и доходе $K=50$ *найти* спрос на товары.

2. Для функции полезности $u(x)=x_1^{1/2}\cdot(x_2-1)^{1/3}$ при векторе цен $p=(30{,}20)$ и доходе $K = 100$ *найти* спрос на товары.

3. Определим функцию спроса Торнквиста:

$x=\dfrac{\alpha K}{K+\beta}$ для "предметов первой необходимости";

$x=\alpha\dfrac{K-\gamma}{K+\beta}$ для "предметов относительной роскоши";

$x=\alpha K\left(\dfrac{K-\gamma}{K+\beta}\right)$ для "предметов роскоши", где параметры α, β, и γ зависят от цен.

Найти.

Задание А. Асимптоты этих функций;

Задание Б. В случае двух товаров спрос на первый выражается функцией Торнквиста для "предметов первой необходимости" при $\alpha=a$, $\beta=bp_1$ и $p_2=1$ (второй товар является единицей счета). Проверить, что соответствующая функция полезности имеет вид: $u(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{b-a}(x_1+b-a)^{-b}$.

1.8. Влияние дохода и замены

Изменение цены на какой-либо один товар оказывает двоякое влияние на спрос. При изменении цены на какой-то один товар изменяется реальный доход и соотношение цен. Влияние изменения цены на спрос будем рассматривать на примере двух товаров, используя при этом функции спроса (1.17), которые получаются в результате решения оптимизационной задачи (1.9).

Пусть цена первого блага повысилась с p_1^1 до p_1^2. Тогда бюджетная прямая (рис. 1.6.) из положения 1 перейдет в положение 3. Точка A на линии безразличия U_1, касающаяся первоначального бюджетного ограничения, будет заменена новой точкой оптимума B, где новая линия безразличия U_2 касается новой бюджетной прямой. Если мы хотим компенсировать потребителю потерю благосостояния, то должны увеличить его доход так,

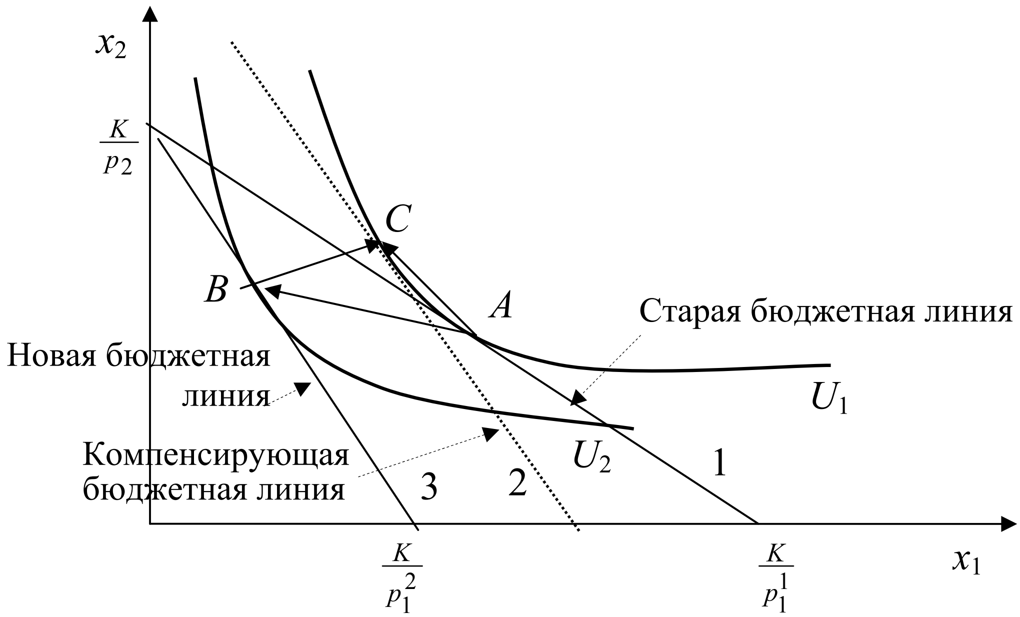


Рис. 1.6. Влияние замены и влияние дохода

чтобы новая бюджетная прямая 3 (параллельна линии 2) коснулась линии безразличия U_1 в некоторой точке C. Направленный отрезок AC показывает "эффект замены" при росте цены, то есть изменение структуры спроса при условии поддержания прежнего уровня благосостояния. Направленный отрезок CB отражает "эффект дохода", то есть изменение потребительского спроса при сохранении соотношения цен благ и изменении уровня дохода. Общий результат роста цены (при отсутствии компенсации) выражается направленным отрезком AB.

Пример 1.8.1. Продолжим рассматривать задачу потребительского выбора, приведенную в примере А. Пусть $p_1 = 10$ ден. ед., а $p_2 = 2$ ден. ед. и доход потребителя – 60 ден. ед. Пусть цена второго товара изменится с 2 до 7 ден. ед. Каким должен быть размер компенсации, чтобы уровень полезности остался прежним?

Решение. Пусть x_1 и x_2 – спрос на товары соответственно первого и второго вида. Тогда задача имеет вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max \\ 10x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решая задачу при начальных ценах, получаем следующие значения:

$$x_1^* = \frac{60}{2\cdot 10} = 3, \qquad x_2^* = \frac{60}{2\cdot 2} = 15, \qquad y^* = \frac{60}{2\cdot 10\cdot 2} = \frac{3}{2}, \qquad u^* = 45.$$

После того как цена второго товара возросла на 5 ден. ед. и достигла 7, для того, чтобы приобрести прежний оптимальный набор, потребителю необходимо дополнительно $(7-2)\cdot 15 = 75$ ден. ед. Однако прежняя структура потребления при новых ценах не будет являться оптимальной (так как новое бюджетное ограничение будет касаться линии уровня целевой функции в другой точке), и необходимая компенсация будет меньше 75 ден. ед.

Выясним, какая же минимальная компенсация должна быть, чтобы остаться на прежнем уровне полезности, и как изменится спрос. Пусть M – сумма компенсации. Тогда при новых ценах спрос потребителя на первый и второй товар соответственно будет равен:

$$x_1^{*н} = \frac{60+M}{2\cdot 10}, \qquad x_2^{*н} = \frac{60+M}{2\cdot 7}.$$

Целевая функция будет равна: $\dfrac{(60+M)^2}{10\cdot 4\cdot 7}$, и это выражение должно быть равно начальному значению целевой функции $u^* = 45$.

Следовательно, $\dfrac{(60+M)^2}{10\cdot 4\cdot 7} = 45$, $M \approx 52{,}25$, что существенно меньше 75.•

Рассмотрим данную задачу в общем виде. Пусть целевая функция имеет вид: $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, цены на товары – p_1 и p_2 соответственно, а доход – K. Пусть цена первого товара p_1 возросла в z раз ($z > 1$). Каков необходимый минимальный размер компенсации и как изменится структура спроса? Обозначим: $\overline{K}$ – новый размер дохода, а спрос соответственно $x_1^{*н}$ и $x_2^{*н}$. Тогда очевидно, что

$$x_1^{*н} = \frac{\overline{K}}{2zp_1} \text{ и } x_2^{*н} = \frac{\overline{K}}{2p_2},$$

и условие компенсации будет иметь вид:

$$\frac{\overline{K}^2}{4zp_1p_2} = \frac{K^2}{4p_1p_2},$$

откуда получим:

$$\overline{K} = \sqrt{z} \cdot K, \quad x_1^{*н} = \frac{x_1^*}{\sqrt{z}}, \quad x_2^{*н} = x_2^* \sqrt{z}.$$

Таким образом, спрос на первый товар в случае компенсации сократится в $\sqrt{z}$ раз (а не в z раз, как было без нее), а спрос на второй – товар в $\sqrt{z}$ раз возрастет. В случае роста цены второго товара ситуация будет полностью симметрична. Таким образом, $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ при $i, j = 1{,}2$. Индекс *comp* означает, что перекрестная частная производная спроса рассчитывается при необходимой для поддержания прежнего уровня благосостояния компенсации дохода. Условие компенсации снимает "эффект дохода", оставляя лишь "эффект замены", что позволяет более точно определить понятие взаимозаменяемости и взаимодополняемости товаров и оценить эти характеристики.

Определение. Товары *i* и *j* называются *взаимозаменяемыми*, если $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ и $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$ (эти два условия равносильны), и *взаимодополняемыми*, если $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0$ и $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$.

Рассчитаем соответствующие частные производные для рассматриваемой нами задачи, когда цена первого товара возросла в z раз. В этом случае приращение $\Delta x_1^* = x_1^{*н} - x_1^* = \frac{x_1^*}{\sqrt{z}} - x_1^*$, $\Delta x_2^* = x_2^{*н} - x_2^* = \sqrt{z} \cdot x_2^* - x_2^*$, $\Delta p_1 = zp_1 - p_1$.

Отсюда имеем:

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{\Delta p_1 \to 0} \frac{\Delta x_1^*}{\Delta p_1} = \lim_{z \to 1} \frac{x_1^*\left(1 - \sqrt{z}\right)}{p_1\sqrt{z}(z-1)} = \lim_{z \to 1}\left(-\frac{x_1^*}{p_1\sqrt{z}\left(1+\sqrt{z}\right)}\right) =$$

$$= -\frac{x_1^*}{2p_1} = -\frac{K}{4p_1^2} < 0;$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{\Delta p_1 \to 0} \frac{\Delta x_2^*}{\Delta p_1} = \lim_{z \to 1} \frac{x_2^*\left(\sqrt{z}-1\right)}{p_1\sqrt{z}(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{x_2^*}{p_1\sqrt{z}\left(\sqrt{z}+1\right)} =$$

$$= \frac{x_2^*}{2p_1} = \frac{K}{4p_1p_2} > 0.$$

Последняя величина является положительной, и в соответствии с определением рассматриваемые нами товары будут взаимозаменяемыми.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x) = x_1^{1/2} \cdot (x_2 - 1)^{1/3}$, при векторе цен $p = (30,20)$ и доходе $K = 100$, *найти*, как изменится спрос на товары, если цена второго товара возрастет на 5 единиц, а полезность останется неизменной.
2. Для функции полезности $u(x) = x_1^{1/2} \cdot (x_2 - 1)^{1/3}$, при векторе цен $p = (30,20)$ и доходе $K = 100$, *вычислить* оптимальную компенсацию дохода при сохранения уровня полезности, если цена второго товара возросла на 40%.

1.9. Уравнение Слуцкого

Мы рассмотрели, как будет изменяться спрос под действием изменения основных параметров – дохода и цены в отдельности, а так же компенсирующего изменения дохода. Из этих уравнений следуют результаты применения метода сравнительной статики для теории потребления. Таким уравнением является уравнение Слуцкого, опубликованное российским математиком в 1915 году.

Уравнение Слуцкого имеет вид:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x^*}{\partial K}\right) \cdot x^*.$$

Это основное уравнение теории потребления. Выписывая уравнение Слуцкого для товара и цены, получим:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right) = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial K}\right) \cdot x_i^*, \qquad i, j = 1,2,\ldots,n,$$

Общий эффект	=	*Влияние замены*	+	*Влияние дохода,*

где, как показано $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)$, – общий эффект от влияния цены на спрос; $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp}$ – влияние замены, т.е. компенсированного изменения цены на спрос; и $\left(-\dfrac{\partial x_i^*}{\partial K}\right)\cdot x_i^*$ – влияние изменения дохода на спрос.

Матрица влияния замены симметрична и отрицательно полуопределена. Из уравнения Слуцкого, учитывая симметричность, получаем условие симметричности

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i^*}{\partial K}x_j^*=\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}+\frac{\partial x_j^*}{\partial K}x_i^*,\qquad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Из отрицательной полуопределенности следует, что все частные значения влияния замены отрицательны

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp}<0,\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Это означает, что компенсированное возрастание цены товара всегда приводит к уменьшению спроса на него. Уравнение Слуцкого требует, чтобы

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)=\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp}-\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial K}\right)\cdot x_i^*,$$

поэтому (т.к. первое выражение в правой части – собственно влияние замены – отрицательно) выражение в левой части, характеризующее общий эффект, также отрицательно в том случае, если второе выражение в правой части достаточно малое и отрицательное:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\le 0,\text{ если }\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial K}\right)x_i^*<\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp}<0.$$

Определение. Если с ростом цены спрос на товар снижается, то товар называется *нормальным*; если спрос повышается, то такие товары называются *товарами Гиффина*:

$$\left\{\begin{matrix} \text{нормальные} \\ \\ \text{товары} \\ \text{Гиффина} \end{matrix}\right\}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\left\{\begin{matrix} < \\ \\ > \end{matrix}\right\}0.$$

Определение. Если с ростом дохода спрос на товар повышается, то такой товар называется *ценным*, если наоборот, то *малоценным*:

$$\left\{\begin{matrix} \text{ценные} \\ \text{малоценные} \end{matrix}\right\}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial x_i^*}{\partial K}\left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\}0.$$

Из вышесказанного следует, что товары Гиффина должны быть малоценными товарами. Примером нормального товара может служить масло: при повышении цены его покупается меньше, а при повышении дохода – больше. Нормальным малоценным товаром является маргарин: его покупают меньше, если увеличивается цена на него, но с ростом дохода его также покупают меньше, поскольку потребитель получает возможность покупать больше масла.

Определение. *Коэффициент эластичности спроса на товар i от цены на товар j*

$$E_{ij}^p = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}$$

характеризует относительное изменение спроса по отношению к относительному изменению цены. Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится спрос на i-й товар, если цена на j-й товар изменится на 1%.

Определение. *Коэффициент эластичности спроса на товар i от цены на товар i*

$$E_{ii}^p = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}$$

характеризует относительное изменение спроса по отношению к относительному изменению цены. Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится спрос на i-й товар, если цена на этот товар изменится на 1%.

Определение. *Коэффициент эластичности спроса на товар i от дохода K*

$$E_i^K = \frac{\partial x_i}{\partial K}\frac{K}{x_i}$$

характеризует относительное изменение спроса по отношению к относительному изменению дохода. Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится спрос на i-й товар, если доход потребителя изменится на 1%.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(x_j-a_j\right)^{\alpha_j}$, $n=2$ и $\begin{cases} x_j \ge a_j \ge 0 \\ \alpha_j > 0 \\ j=1,2 \end{cases}$ при векторе цен $p=(5{,}10)$ и доходе $K=50$ *найти* эластичность спроса по цене на другой вид товара и по доходу.

2. Для функции полезности $u(x)=x_1^{1/2}\cdot(x_2-1)^{1/3}$ при векторе цен $p=(30{,}20)$ и доходе $K=100$ *найти* эластичность спроса по цене на другой вид товара и по доходу.

3. Определим функцию спроса Торнквиста

$x=\dfrac{\alpha K}{K+\beta}$ для "предметов первой необходимости",

$x=\alpha\dfrac{K-\gamma}{K+\beta}$, для "предметов относительной роскоши",

$x=\alpha K\left(\dfrac{K-\gamma}{K+\beta}\right)$, для "предметов роскоши", где параметры α, β, и γ зависят от цен. *Найти* эластичности по доходу этих функций.

4. Проблема выбора между заработком и досугом может быть рассмотрена с точки зрения теории потребления. Тогда задачу можно сформулировать в следующем виде:

$$\begin{cases} u(x,l)\to \max \\ px=K+wh \\ l+h=q \end{cases},$$

где x означает набор товаров; l – досуг $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}>0\right)$; h – рабочее время; w – уровень заработной платы; K – нетрудовой доход и q – общее наличное время. Параметрами задачи являются p, K, w, q.

Найти функцию спроса для товаров и досуга. Может ли быть досуг малоценным? Типа товаров Гиффина?

Построить геометрически кривую предложения труда, предположив, что в наличии имеется только один товар.

1.10. Функция спроса Маршалла и косвенная функция полезности

Набор товаров $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, который выбирает потребитель, характеризует спрос на рассматриваемые товары. Действительно, x_1^* – такое количество первого товара, которое потребитель "хочет и может" приобрести, т.е. – величина индивидуального спроса на первый товар; x_2^* – величина спроса на второй товар. Таким образом, решение задачи (1.11) для конкретных значений цен и дохода потребителя позволяет найти количественную оценку величины спроса на первый и второй товары.

При изменении цен на товары бюджетная линия будет менять положение в пространстве товаров (см. рис. 1.5), вследствие чего будут меняться оптимальные наборы потребителя, т.е. величины спроса на товары. При изменении дохода потребителя бюджетная линия будет перемещаться в пространстве товаров параллельно наклону исходной бюджетной линии. И при разной величине дохода потребитель будет выбирать отличающиеся один от другого наборы товаров, т.е. предъявлять различный спрос на товары. Изменение величины спроса на первый и второй товары при изменении цен и дохода говорит о том, что спрос на них зависит от изменения последних. Эта зависимость может быть описана с помощью функций. Обозначим их через D_1 и D_2 :

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, K) \quad \text{и} \quad x_2^* = D_2(p_1, p_2, K). \qquad (1.23)$$

Функции (23) описывают зависимость величины спроса на первый и второй товары от изменения их цен и дохода потребителя. Они называются *функциями спроса Маршалла*. Маршаллианский спрос – наилучший набор благ на данной бюджетной линии. С математической точки зрения они описывают множество решений задачи (1.11) для различных значений параметров p_1, p_2 и K и могут быть найдены для любой конкретной функции полезности, описывающей предпочтения потребителя.

Полученные решения из предыдущего примера (1.22) представляют собой функцию спроса Маршалла для первого и второго товаров соответственно:

$$x_1^{\,*} = D_1(p_1, p_2, K) = \frac{2K}{5p_1}, \qquad x_2^{\,*} = D_2(p_1, p_2, K) = \frac{3K}{5p_2}.$$

Зная функции спроса (1.22), можно исследовать влияние изменения цен и дохода на величину спроса потребителя. Изменение спроса, допустим, на первый товар при изменении его цены можно оценить путем определения частной производной функции $x_1^* = D_1(p_1, p_2, K)$ по переменной p_1, при изменении цены второго товара – определением частной производной по переменной p_2. Влияние изменения дохода на величину спроса можно оценить с помощью частной производной функции D_1 по доходу K. Выпишем эти частные производные для конкретных функций спроса из примера 2:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -\frac{3K}{5p_1^2}; \quad \frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 0; \quad \frac{\partial D_1}{\partial K} = -\frac{3}{5p_1}. \qquad (1.24)$$

Как видно из (1.24), производная $\partial D_1/\partial p_1$ отрицательна. Это говорит о том, что величина спроса на первый товар и цена товара изменяются в разных направлениях, что согласуется с законом спроса. Частная производная $\partial D_1/\partial p_2$ равна нулю. Следовательно, при изменении цены второго товара величина спроса на первый товар не меняется. И, наконец, частная производная $\partial D_1/\partial K$ положительна. Величина спроса на первый товар и доход изменяются в одном направлении: с ростом дохода величина спроса растет, с уменьшением дохода – падает.

Можно продолжить анализ спроса потребителя на основе функций спроса (1.22).

Если в функции $x_1^* = D_1(p_1, p_2, K)$ зафиксировать значения переменных p_2 и K на некотором уровне, допустим $p_2 = p_2{}^\circ$ и $K = K^\circ$, то функция D_1 превратится, по существу, в функцию одной переменной, описывающей зависимость величины спроса на первый товар от его цены. График этой функции называется кривой спроса. Таким образом, благодаря знанию функции спроса $D_1(p_1,p_2,K)$ мы смогли, применив правило "ceterus paribus" (при прочих равных условиях), перейти к кривой спроса, с анализа которой начинается изучение спроса в экономической теории.

Если в функции $x_1^* = D_1(p_1, p_2, K)$ зафиксировать значения переменных p_1 и p_2 на некотором уровне, допустим $p_1 = p_1^\circ$ и $p_2 = p_2^\circ$, функция D_1 будет описывать зависимость величины спроса на первый товар от дохода K. График этой зависимости (функции) называется кривой Энгеля (рис. 1.7).

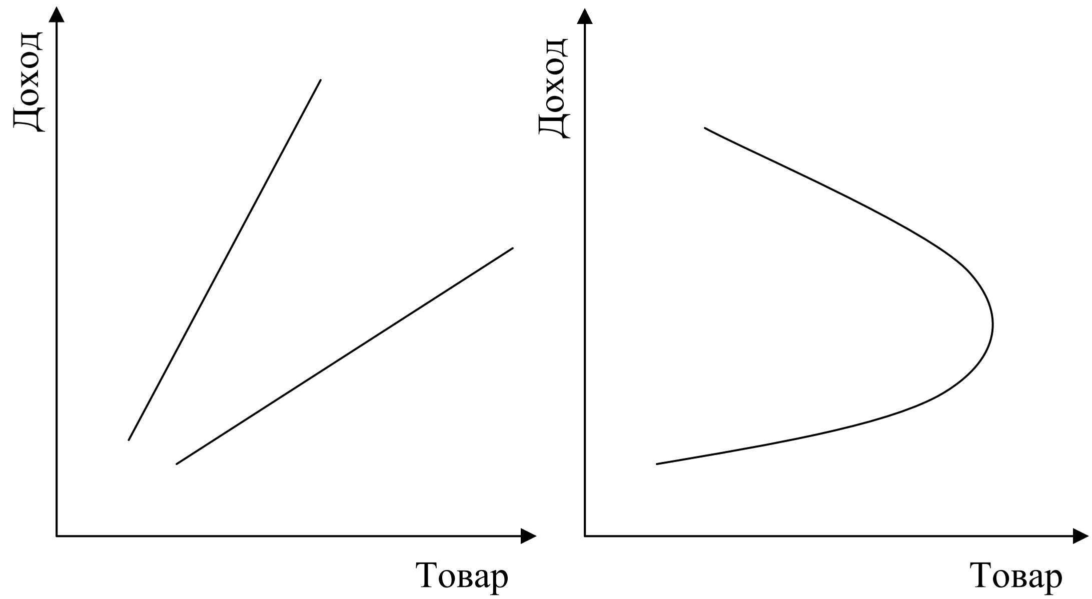


Рис. 1.7а *Рис. 1.7б*

Кривые Энгеля

На рис. 1.7*а* товар является нормальным и, следовательно, кривая Энгеля возрастает. На рис. 1.7*б* при определенном доходе товар становится неполноценным, поэтому кривая Энгеля поворачивает влево.

Далее анализ спроса можно углубить в следующем направлении. Если цель потребительского выбора – достижение максимальной полезности, возможной при заданных ценах и доходе потребителя, то исследование зависимости уровня достигаемой полезности от всевозможных значений цен и дохода представляет значительный интерес. Знание функций спроса (1.22) позволяет провести такой анализ. Для этого заменим в функции полезности x_1 и x_2 на $x_1^* = D_1(p_1, p_2, K)$ и $x_2^* = D_2(p_1, p_2, K)$, соответственно. Обозначим полученную функцию через $V(p_1, p_2, K)$ или $V(p, K)$, где p – вектор цен, $p = (p_1, p_2)$, и назовем ее *функцией косвенной полезности*.

Построим функцию косвенной полезности для примера 1.7.1:

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, K) = \frac{2K}{5p_1}, \qquad x_2^* = D_2(p_1, p_2, K) = \frac{3K}{5p_2}.$$

Тогда $V(p_1, p_2, K) = \left(\frac{2K}{5p_1}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3K}{5p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$. После несложных преобразований можно привести функцию косвенной полезности к следующему виду:

$$V(p_1, p_2, K) = \left(\frac{K}{5}\right)^{5/6} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{p_2}\right)^{1/2}. \qquad (1.25)$$

Свойства функции косвенной полезности $V(p, K)$:

1) $V(p, K)$ является не возрастающей по цене: если $p^1 \geq p$, то
$$V(p^1, K) \leq V(p, K);$$
2) $V(p, K)$ является не убывающей по доходу: если $K^1 > K$, то
$$V(p, K^1) \geq V(p, K);$$
3) $V(p, K)$является однородной нулевой степени на множестве (p,K), т.е.
$$V(\lambda p, \lambda K) = V(p, K);$$
4) является квазивыпуклой по p: множество $\{p\colon V(p,K) < v\}$ является выпуклым множеством для всех $v > 0$;
5) $V(p, K)$ непрерывная функция для всех $p > 0$, $K > 0$.

Данные свойства используются при анализе взаимосвязи этой функции с другими функциями, привлекаемыми для исследования индивидуального спроса.

Задача для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x) = x_1^{1/2} \cdot (x_2 - 1)^{1/3}$ *постройте* функцию косвенной полезности и *проверьте* выполняемость свойств для данной функции.

1.11. Выбор потребителя при заданной полезности

При анализе поведения потребителя наряду с задачей оптимизации потребительского выбора (1.11) часто возникает задача другого рода. Допустим, задана некоторая кривая безразличия и цены товаров. Потребитель желает выбрать из множества одинаково полезных наборов такой, который является самым дешевым, т.е. минимизирует его расходы при заданных ценах на товары. Будем называть эту задачу задачей, связанной с задачей (1.11). Математически она может быть записана следующим образом:

$$k = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min \tag{1.26}$$

$$U(x_1, x_2) = u\,. \tag{1.27}$$

Задача (1.26), (1.27), так же как и задача (1.11), – задача на нахождение условного экстремума и может быть решена методом Лагранжа. Согласно геометрической интерпретации данного метода оптимальный набор товаров для задачи (1.26), (1.27) является точкой касания некоторой линии уровня целевой функции $k(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$ и нулевой линии уровня функции-ограничения $G(x_1,x_2) = \boldsymbol{u} - U(x_1,x_2)$ (см. рис. 1.8).

$$L(x, y) = p_1x_1 + p_2x_2 + y(u - U(x_1, x_2)).$$

Тогда, согласно теореме Лагранжа, будут иметь место следующие равенства:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - yU(x_1, x_2) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - yU(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = u - U(x_1, x_2) = 0\,.$$

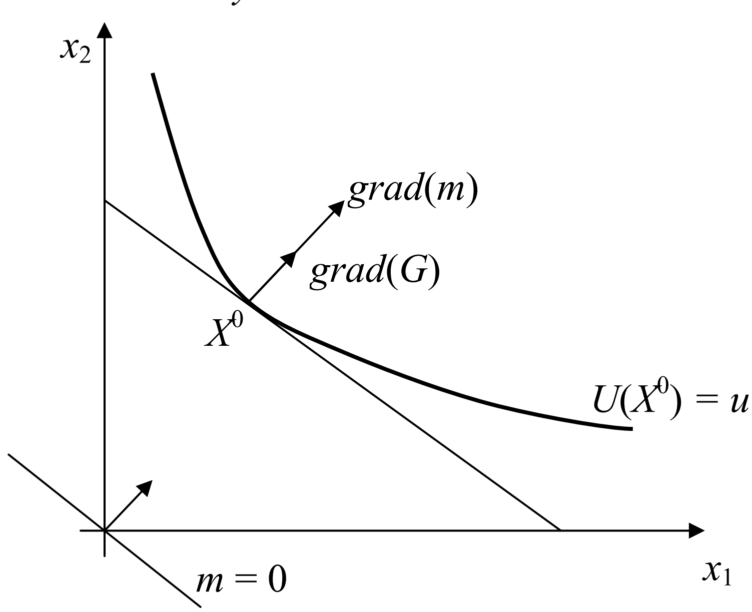


Рис. 1.8. Выбор потребителя при заданной полезности

Нетрудно заметить, что оптимальный набор $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ (решение) задачи (1.26), (1.27) зависит от уровня полезности и соотношения цен на продукты, задающего наклон линий уровня линейной целевой функции. Это означает, что величина спроса на первый товар $x_1{}^0$ и величина спроса на второй товар $x_2{}^0$ при выборе потребителя в соответствии с условиями задачи (1.26), (1.27) зависят от уровня полезности и цен товаров. Другими словами, спрос на первый и спрос второй товар могут быть описаны как некоторые функции от цен и полезности. Обозначим их через $x_1^0 = H_1(p_1, p_2, u)$ и $x_2^0 = H_2(p_1, p_2, u)$ для первого и второго товаров соответственно. Эти функции называются *функциями спроса Хикса*. Они описывают множество решений задачи (1.26), (1.27) и позволяют исследовать динамику спроса при изменении полезности и цен. Хиксианский спрос – самый дешевый набор благ на данной кривой безразличия.

Благодаря функциям спроса Хикса $x_1^0 = H_1(p_1, p_2, u)$ и $x_2^0 = H_2(p_1, p_2, u)$ минимальный расход на оптимальный потребительский набор $k^0(x_1, x_2) = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$ может быть исследован в зависимости от уровня полезности и цен. Для этого функции спроса H_1 и H_2 следует подставить в целевую функцию (1.26):

$$k = p_1 H_1(p_1, p_2, u) + p_2 H_2(p_1, p_2, u).$$

Полученная функция называется *функцией расходов* и обозначается $k(p_1, p_2, u)$ или $k(p, u)$, где p – вектор цен, $p = (p_1, p_2)$.

Свойства функции расходов $k(p,u)m$ (p,u):

1) $k(p,u)$ является не возрастающей по p;
2) $k(p,u)$ является однородной первой степени по ценам:
$$k(\lambda p, u) = \lambda\, k(p,u);$$
3) $k(p,u)$ является вогнутой по цене;
4) $k(p,u)$ – непрерывная в пространстве цен p, для $p > 0$;
5) $k(p,u)$ возрастает по u.

Пример 1.11.1. Выведем функции спроса Хикса и функцию расходов для функции полезности из примера 2. Для этого сформулируем задачу потребительского выбора, связанную с задачей (1.21), и решим ее методом Лагранжа. Итак, задача определения самого дешевого потребительского набора (минимизация расходов) заданной полезности имеет следующий вид:

$$k = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min$$
$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} = u. \qquad (1.28)$$

Построим функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = p_1x_1 + p_2x_2 + y\left(u - x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}\right)$$

и найдем для нее точку минимума $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$.

Согласно необходимому условию экстремума функции трех переменных для точки $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \frac{1}{3} y x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ или } p_1 = \frac{1}{3} y x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \frac{1}{2} y x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{2}} = 0 \text{ или } p_1 = \frac{1}{2} y x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = u - x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Исключим из двух первых уравнений переменную y. Это позволит выразить переменную x_2 через x_1: $x_2 = \dfrac{3p_1x_1}{2p_2}$. Заменив в последнем уравнении x_2 на его выражение через x_1, получим:

$$u = x_1^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3p_1}{2p_2} x_1\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (x_1)^{5/6} = u\left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow x_1^0 = (u)^{\frac{6}{5}} \left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^{\frac{3}{5}} \text{ и } x_2^0 = (u)^{6/5} \left(\frac{3p_1}{2p_2}\right)^{\frac{2}{5}}. \qquad (1.29)$$

Мы вывели функции спроса Хикса для заданной функции полезности $U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$.

Они описывают множество решений задачи (1.25), (1.27), т.е. зависимость величины спроса на товары от уровня полезности и цен (см. формулы (1.32) для $x_1{}^0$ и $x_2{}^0$). Подставим в (1.25) найденные функции $x_1{}^0$ и $x_2{}^0$:

$$p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = p_1u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^{\frac{3}{5}} + p_2u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{3p_1}{2p_2}\right)^{\frac{2}{5}} =$$

$$= u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} p_1^{\frac{2}{5}} p_2^{\frac{3}{5}} + u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}} p_1^{\frac{2}{5}} p_2^{\frac{3}{5}} = 5u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{p_1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{p_2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = k(p,u). \tag{1.30}$$

Величина $p_1x_1^0 + p_2x_2^0$ – стоимость самого дешевого набора на кривой безразличия, заданная уравнением из задачи (1.28), и заданных ценах товаров. Как видно из (1.30), она зависит от уровня полезности и цен, т.е. является функцией расходов для потребителя, предпочтения которого описываются функцией полезности

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

Можно показать, что функция косвенной полезности $V(p,K)$ и функция расходов $k(p,u)$ являются взаимно обратными функциями. Действительно, несложные преобразования позволяют вывести из функции косвенной полезности (1.25) функцию расходов (1.30):

$$V = \left(\frac{K}{5}\right)^{5/6}\left(\frac{2}{p_1}\right)^{1/3}\left(\frac{3}{p_2}\right)^{1/2} \Rightarrow (K)^{5/6} = V(5)^{5/6}\left(\frac{p_1}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{p_2}{3}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow K = 5(V)^{6/5}\left(\frac{p_1}{2}\right)^{2/5}\left(\frac{p_2}{3}\right)^{3/5}.$$

И, наоборот, из функции расходов (1.30) можно вывести функцию косвенной полезности:

$$k = 5(u)^{6/5}\left(\frac{p_1}{3}\right)^{3/5}\left(\frac{p_2}{2}\right)^{2/5} \Rightarrow (u)^{6/5} = \left(\frac{k}{5}\right)\left(\frac{3}{p_1}\right)^{3/5}\left(\frac{2}{p_2}\right)^{2/5}$$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{k}{5}\right)^{5/6}\left(\frac{3}{p_1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{p_2}\right)^{1/3}.$$

Задача для самостоятельного решения

1. Для функции полезности $u(x) = x_1^{1/2} \cdot (x_2 - 1)^{1/3} = 100$, при векторе цен $p = (30{,}20)$ *найти* спрос на товары и минимальный доход.

1.12. Лемма Шеппарда и тождество Роя

Рассмотрим основные теоремы теории потребительского выбора, которые известны как лемма Шеппарда (теорема 1), тождество Роя (теорема 2) и уравнение Слуцкого (теорема 3).

Теорема 1 (***лемма Шеппарда***). Для функции расходов $k(p,u)$ и функций спроса Хикса $x_i^0 = H_i(p_1, p_2, u)$ справедливо следующее соотношение:

$$H_i(p_1, p_2, u) = \frac{\partial k(p_1, p_2, u)}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2).$$

Доказательство. Приведем графическое доказательство. Пусть переменная u и одна из цен, допустим, второго товара, равны, соответственно: $u = u^*$, $p_2 = p_2^*$. Тогда функция расходов $k(p_1, p_2^*, u^*)$ является функцией только переменной p_1. Предположим, что эта функция дифференцируема.

Что является производной функции $k(p_1, p_2^*, u^*)$ при $p_1 = p_1^*$?

Так как полезность потребительского набора

$$(H_1(p_1^*, p_2^*, u^*),\ H_2(p_1^*, p_2^*, u^*))$$

равна u^*, выполняется следующее соотношение:

$$k(p_1, p_2^*, u^*) \le p_1 H_1(p_1^*, p_2^*, u^*) + p_2^* H_2(p_1^*, p_2^*, u^*). \qquad (1.31)$$

Следовательно, все точки графика функции, стоящей в правой части неравенства (1.31), расположены над (выше) точками графика функции $k(p_1, p_2^*, u^*)$, соответствующей левой части неравенства (1.31), и при $p_1 = p_1^*$ графики функций касаются. Точнее, график линейной по p_1 функции $p_1 H_1(p_1^*, p_2^*, u^*) + p_2^* H_2(p_1^*, p_2^*, u^*)$ является касательной к графику функции $k(p_1, p_2^*, u^*)$ в точке $p_1 = p_1^*$ (см. рис. 1.9).

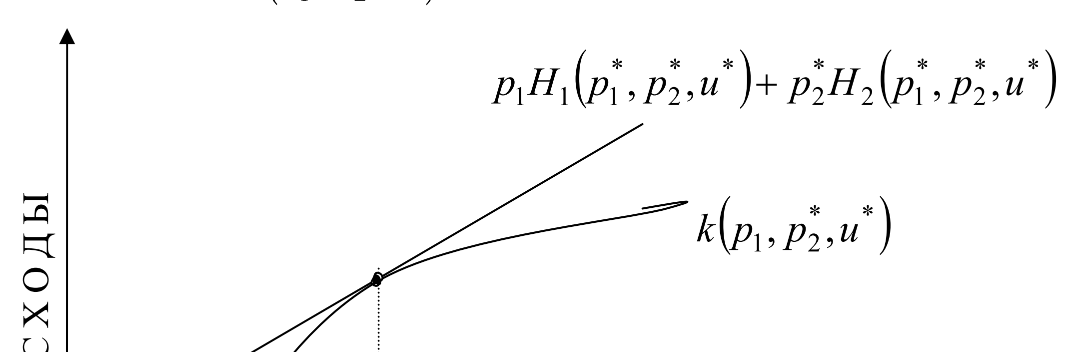


Рис. 1.9. График линейной функции и касательной

Последнее означает, что производные функций, образующих левую и правую части неравенства (1.31), в точке $p_1 = p_1{}^*$ равны, и, следовательно:

$$\frac{\partial k(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = H_1(p_1, p_2, u),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 (***тождество Роя***). Для функций спроса Маршалла и функции косвенной полезности справедливо следующее соотношение:

$$D_i(p_1, p_2, K) = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial V}{\partial K} \quad (i = 1{,}2).$$

Доказательство. Допустим x_1^* и x_2^* – решение задачи потребительского выбора, т.е. $x_1^* = D_1(p_1, p_2, K)$ и $x_2^* = D_2(p_1, p_2, K)$. Пусть $u^* = U(x^*)$. Тогда можно утверждать, что:

$$x_1^* = H_1(p_1, p_2, u^*),\ x_2^* = H_2(p_1, p_2, u^*) \text{ и } K = k(p_1, p_2, u^*).$$

И, следовательно, $u^* = V(p, k(p, u^*))$ для фиксированного значения u^* и любых цен p. Продифференцируем последнее тождество по p_i ($i = 1{,}2$). Получим:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial K}\frac{\partial k}{\partial p_i}, \qquad (i = 1{,}2). \tag{1.32}$$

Используя теорему 1, заменим $\dfrac{\partial k}{\partial p_i}$ на $H_i\left(p_1, p_2, u^*\right) = x_i^* = D_i\left(p_1, p_2, K\right)$ и перепишем (1.32) по-другому:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial K} H_i(p_1, p_2, u^*) = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial K} x_1^* = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial K} D_i(p_1, p_2, K).$$

Из последнего соотношения легко получить утверждение теоремы.

Теорема 3 (***уравнение Слуцкого***)**.** Для функций спроса Маршалла и функций спроса Хикса справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} - \frac{\partial D_j}{\partial K} x_i, \tag{1.33}$$

где величина Маршаллианского спроса оценивается при заданных ценах и доходе, а величина спроса по Хиксу – для уровня полезности, соответствующего найденной точке Маршаллианского спроса.

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$x_j^*\left(p, k\left(p, u\right)\right) \equiv H_j\left(p, u\right), \; (j = 1,2)$$

и продифференцируем обе части этого тождества по переменной p_i ($i = 1,2$). Получим

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial K}\frac{\partial k}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \quad \text{или} \quad \frac{\partial D_j}{\partial p_i} + \frac{\partial D_j}{\partial K}\frac{\partial k}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}. \tag{1.34}$$

Согласно теореме 1, $\dfrac{\partial k}{\partial p_i}$ есть функция $H_i\left(p, u\right) = x_i^*\left(p, k\left(p, u\right)\right)$.

Поэтому (1.34) можно истолковать следующим образом:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} + \frac{\partial D_j}{\partial K} x_i^*(p, k(p, u)) = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}.$$

Сделав замену фиктивных переменных (постоянных величин, записанных в виде переменных), получим соотношение (1.33), которое известно как уравнение Слуцкого.

Уравнение Слуцкого позволяет, *во-первых*, анализировать изменение спроса, описываемого функциями Хикса, не зная самих функций; *во-вторых*, отнести рассматриваемые товары к той или иной категории в зависимости от направления и величины изменения спроса на них при изменении цен и дохода; *в-третьих*, оценить эластичность спроса по Хиксу, используя для этого функции спроса Маршалла, если записать это уравнение в терминах коэффициентов эластичностей.

Приведем формулировку уравнения Слуцкого в терминах коэффициентов эластичностей:

$$E_{ij} = E_{ij}^{H} - \alpha_j E_{iK}, \tag{1.35}$$

где E_{ij} – эластичность маршаллианского спроса на i-й товар по цене j-го товара, E_{ij}^{H} – эластичность спроса по Хиксу (компенсированного спроса) на i-й товар по цене j-го товара, E_{iK} – эластичность маршаллианского спроса на i-й товар по доходу, – доля расходов на j-й товар в доходе потребителя $\left(\alpha_j = \dfrac{p_j x_j^*}{K} \right)$.

Далее с помощью несложных преобразований уравнений (1.35) можно получить уравнения агрегации, которые отражают зависимости между эластичностями спросов по Хиксу для различных товаров при изменении цены одного из них.

В частности, для $i = j = 2$ имеем следующие два уравнения:

$$\alpha_1 E_{11}^{H} + \alpha_2 E_{21}^{H} = 0 \text{ и } \quad \alpha_1 E_{12}^{H} + \alpha_2 E_{22}^{H} = 0,$$

где E_{11}^{H} – эластичность спроса, по Хиксу, на 1-й товар при изменении цены 1-го товара;

E_{21}^{H} – эластичность спроса, по Хиксу, на 2-й товар при изменении цены 1-го товара;

E_{12}^{H} – эластичность спроса, по Хиксу, на 1-й товар при изменении цены 2-го товара;

E_{22}^{H} – эластичность спроса, по Хиксу, на 2-й товар при изменении цены 2-го товара;

α_1 – доля расходов на 1-й товар в доходе потребителя $\left(\alpha_1 = \dfrac{p_1 x_1^*}{K} \right)$,

α_2 – доля расходов на 2-й товар в доходе потребителя $\left(\alpha_2 = \dfrac{p_2 x_2^*}{K} \right)$.

2. ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА

При изучении экономических процессов в современном крупномасштабном производстве бывает, *с одной стороны*, чрезвычайно трудно собрать необходимые статистические данные для практического построения модели, *с другой стороны*, достаточно просто получить отчетные данные о поведении и взаимосвязи укрупненных экономических показателей, таких, как стоимость произведенного продукта, объем основных фондов, численность работников и т.п.

Оперируя даже такими укрупненными данными и рассматривая производственный объект как "черный ящик" (т.е. изучая лишь связь между затраченными средствами и произведенным продуктом), можно получать определенные содержательные выводы.

Определение производственной функции отличается от понятия технологического множества лишь требованием однозначности.

2.1. Производственная функция

Пусть вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит пространству R_+^n, который интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении). В качестве факторов могут выступать как первичные факторы в обычном понимании, так и продукты производства, внешнего по отношению к изучаемому, которые выступают в данном случае как ресурсы или сырье.

Вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ является вектором пространства R_+^m, который интерпретируется как набор количественных оценок результатов производства при определенных затратах ресурсов. Такими количественными оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостное выражение валового выпуска, национальный доход и т.д.

На множестве R_+^n, которому принадлежат вектора b, выделим подмножество $D \subseteq R_+^n$, а на множестве R_+^m векторов $y - U \subseteq R_+^m$. Введение дополнительных множеств D и U обусловлено реальными экономическими условиями, так как построение любой модели происходит всегда на основе ограниченного статистического материала.

В этом случае отчетные данные, на основе которых будет строиться функция, заполняют ограниченные участки соответствующих пространств. Тогда, если обозначить через P – некоторый производственный процесс, то можно определить отображение f следующим образом:

$$f: \qquad D \to U,$$

где $D \subseteq R_+^n$, $U \subseteq R_+^m$, то есть каждому допустимому вектору запаса ставится в соответствие оптимальный выпуск, возможный именно при таком векторе запаса.

Определенное таким образом отображение называется *производственным* или *технологическим отображением*. Если производственное отображение однозначно, то оно называется *производственной функцией*. Несмотря на широту данного определения производственной функции, до сих пор в научной и прикладной экономико-математической литературе главным образом изучается случай $m = 1$, то есть когда производится единственная количественная оценка результатов производства. В этом случае производственную функцию удобно записывать как обычную функцию нескольких переменных: $y = f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только одномерные случаи.

Вопрос об адекватном описании экономической реальности на языке производственных функций тесно связан с проблемой агрегирования экономических показателей. Для иллюстрации сказанного рассмотрим формальную схему.

Пусть $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \subseteq R_+^n$ описывает набор ресурсов, необходимых для функционирования производственного процесса. Функцию, ставящую в соответствие вектору b вектор $b_1 = (b_1^{'}, \ldots, b_k^{'})$ с меньшим числом координат $(k < n)$, называют отображением агрегирования и интерпретируют как объединение нескольких различных ресурсов в один обобщенный ресурс. В результате этого число k видов таких обобщенных ресурсов становится небольшим. Например, пусть первые три координаты b_1, b_2, b_3 вектора b означают

$b_1 = 10$ тонн стального проката, $b_2 = 15$ тонн чугунного проката, $b_3 = 5$ тонн латунного проката. При агрегировании эти три координаты могут быть заменены одной координатой $b_1' = 30$ тонн проката черных и цветных металлов: $b_1' = b_1 + b_2 + b_3$.

Аналогично можно привести примеры агрегирования различных видов труда к одному виду с помощью либо простого суммирования числа работающих, либо подсчета суммарной заработной платы и т.д.

Весьма важен правильный выбор отображения агрегирования. Может случиться, что не существует производственной функции, моделирующей исходный процесс, в то время как подходящее задание отображения агрегирования позволяет такую функцию построить.

2.2. Линейная производственная функция

Наиболее простым случаем производственных функций является линейная производственная функция. Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП):

$$\begin{gathered} < c, x > \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $b \subseteq R_+^m$ – вектор потребляемых ресурсов, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \subseteq R_+^n$ – вектор валового выпуска, матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – технологическая матрица, вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c \subseteq R_+^n$ – вектор цен на выпускаемую продукцию. Тогда задача ЛП ставится следующим образом: найти такой вектор x валового выпуска, который при заданных векторах запаса b и цен c и в соответствии с технологической матрицей обеспечит максимизацию функции дохода.

Двойственной к задаче ЛП (2.1) является задача:

$$\begin{gathered} < b, y > \to \min \\ yA \ge c \\ y \ge 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Целевая функция минимизирует издержки производства.

Как и у каждой задачи, у задачи ЛП существует множество определения и множество значения.

Определение 2.1. *Множеством допустимых планов* назовем вектор x такой, что выполняется условие $Ax - b \le 0$, т.е.

$$B = \{x \,/\, Ax - b \le 0\}$$

– область определения задачи (2.1). Таким образом, множество B состоит из векторов, удовлетворяющих ограничениям, и план x реализуется. Множество B представляет собой пересечение конечного числа полупространств и называется *полиэдром.*

Определение 2.2. Множество решений задачи (1). x^* – *оптимальное решение задачи* (2.1), если

$$x^* \in B \text{ и } < c, x^* > \ \ge \ < c, x > \text{ для } \forall x \in B:$$

$$Q = \{\, x \,/\, x^* \in B, \ < c, x^* > \ \ge \ < c, x >, \forall\, x \in B \}.$$

Если вектор $x = (x_1, x_2)$ – двумерный, то множество B можно изобразить на плоскости, и оно будет представлять собой пересечение конечного числа полуплоскостей.

Возможны три случая в соответствии с определениями 2.1 и 2.2 на рис. 2.1 множество B неограниченно, целевая функция $< c, x >$ – монотонно возрастающая непрерывная на множестве R_+^2 и, следовательно, неограниченна.

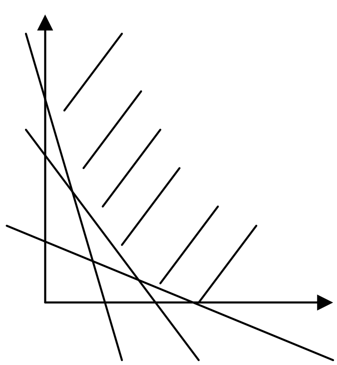


Рис. 2.1

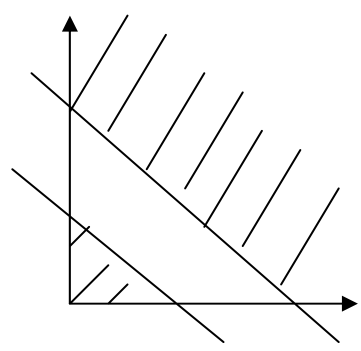


Рис. 2.2

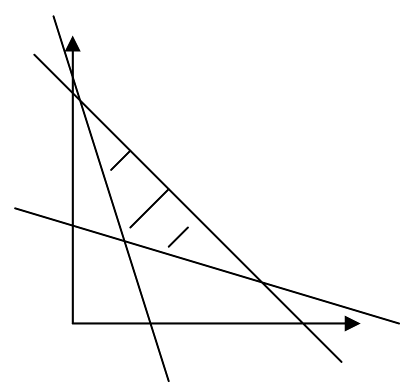


Рис. 2.3

Множества допустимых планов

На рис. 2.2 множество $B = \varnothing$ и решений нет, $Q = \varnothing$. На рис. 2.3 множество $B \ne \varnothing$ ограничено со всех сторон и представляет собой полиэдр. Решение может быть единственно ($Q = 1$) или их может быть бесконечно много ($Q = \propto$), все зависит от структуры целевой функции.

Для построения линейной производственной функции определим множество D следующим образом: множество векторов запаса b для которых существуют допустимые планы, т.е. множество

$B \neq \varnothing$ и, кроме того, существует хотя бы один оптимальный план, т.е. $Q \neq \varnothing$ назовем *множеством допустимых векторов запаса*

$$D = \{b \,/\, B \neq \varnothing, Q = \varnothing\}.$$

На множестве D определим однозначное отображение f следующим образом:

$$f\!: \quad D \to R$$

$$f\!: \quad b \to < c, x^* >, \; x^* \in Q, \tag{2.3}$$

то есть каждому допустимому вектору запаса отображение f ставит в соответствие единственный оптимальный выпуск. Функция f, заданная таким образом, является линейной производственной функцией, и ее можно записать следующим образом:

$$f(b) = < c, x^* > = < b, y^* >, \; x^* \in Q, \; y^* \in Q'. \tag{2.4}$$

Важную роль в линейной производственной функции играет вектор двойственной переменной y. Пусть $b = (b_1^0, b_2^0, ..., b_m^0)$ – начальное состояние вектора запаса ресурсов. Интересен вопрос об изменении дохода при малом изменении вектора запаса. Пусть $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, ..., \Delta b_m)$ – изменение вектора запаса. Тогда прирост дохода описывается как $\Delta f = f(b_0 + \Delta b) - f(b_0)$. В силу (2.4) имеем

$$\Delta f = \left\langle b_0 + \Delta b, y^* \right\rangle - \left\langle b_0, y^* \right\rangle = \left\langle b_0 + \Delta b - b_0, y^* \right\rangle = \left\langle \Delta b, y^* \right\rangle.$$

При малом изменении правых частей ограничений (вектора запаса) прирост дохода прямо пропорционален соответствующим двойственным переменным.

2.3. Свойства производственной функции

Рассмотрим производственную функцию в общем виде $y = f(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Для нее справедливы следующие свойства.

☑ **Первое свойство.** Вектор ресурсов нулевой, следовательно, выпуск равен нулю

$$Y = f(0,0,\ldots,0) = 0.$$

☑ **Второе свойство.** Если $b^1 \geq b^2$, то $f(b^1) \geq f(b^2)$, причем если $b^1 > b^2$, то $f(b^1) > f(b^2)$. Из этого в частности следует, что $y > 0$ при $b > 0$. Если $y = 0$ при положительных затратах некоторых ресурсов, но при $b_i = 0$, то это означает, что ресурс i жизненно необходим для производства хотя бы в малых количествах (например труд, электроэнергия и т.д.);

☑ **Третье свойство.** Средняя эффективность ресурса (средний продукт). Величина валового выпуска, приходящаяся на единицу затраченного i-го ресурса, называется *средней эффективностью ресурса* (средним продуктом) в точке b_0 по ресурсу b_i

$$\mu_{b_i} = \frac{f(b)}{b_i}. \tag{2.5}$$

☑ **Четвертое свойство.** Предельная эффективность ресурса (приростный продукт). Величина частной производной $\frac{\partial f(b)}{\partial b_i}$ в точке b_0 называется *предельной эффективностью ресурса* или предельным продуктом и обозначается

$$r_{b_i} = \frac{\partial f(b)}{\partial b_i} = y_i^*. \tag{2.6}$$

Величина r_{b_i} показывает предельный прирост выпуска продукта при увеличении затрат ресурса b_i на "малую единицу". Из свойства 2 производственной функции с взаимозаменяемыми ресурсами следует, что $r_{b_i} \geq 0$.

Если $r_{b_i b_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_i^2} \leq 0$, то предельная эффективность ресурса падает. Такую ситуацию можно объяснить, например, так: если в производстве какого-либо продукта увеличивать затраты труда, сохраняя при этом неизменными объемы других ресурсов, то предельная производительность труда будет снижаться из-за уменьшения вооруженности единицы труда средствами производства.

Важно понимать, что уменьшение предельной эффективности ресурсов типично только в условиях экономической статики, то есть при неизменном уровне научно-технического прогресса и неизменном качестве используемых ресурсов. Условие $r_{b_i b_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_i^2} < 0$ в западной литературе называют "законом убывающей предельной эффективности ресурсов". Уменьшение предельной эффективности ресурсов перестает быть "законом", как только мы начинаем учитывать НТП.

Вместе с тем предельная полезность ресурса будет возрастать, если

$$r_{b_i b_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial b_i \partial b_j} \geq 0, \qquad i \neq j.$$

То есть если мы будем увеличивать одновременно потребление нескольких ресурсов, производство будет увеличиваться.

☑ **Пятое свойство.** Коэффициент эластичности.

Отношение приростного продукта к среднему называется *коэффициентом эластичности* продукции по данному ресурсу и обозначается

$$E_{b_i} = \frac{r_{b_i}}{\mu_{b_i}} = \frac{\partial f(b)}{\partial b_i} \cdot \frac{b_i}{f(b)} = \frac{\partial \ln f(b)}{\partial \ln b_i}. \qquad (2.7)$$

Коэффициент эластичности представляет собой относительную меру прироста продукции при относительно малом приросте используемого ресурса, то есть показывает, на сколько процентов изменится валовой выпуск, если количество используемого i-го ресурса изменится на 1%.

П р и м е р 2.3.1. Линейная двухфакторная ПФ

$$y = f(b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

где $b = (b_1, b_2)$ – двумерный вектор ресурса, a_1, a_2 – константы, y – объем выпускаемой продукции.

$Y = f(0, 0) = 0$ – вектор ресурсов нулевой, и выпуск равен нулю. Рассмотрим два различных вектора ресурсов $b^A = (b_1^A, b_2^A)$ и $b^B = (b_1^B, b_2^B)$. Пусть вектор b^B доминируется вектором b^A, то есть $b^A \geq b^B$, тогда $f(b^A) \geq f(b^B)$. Проверим :

$$f(b^A) = a_1 b_1^A + a_2 b_2^A, \; f(b^B) = a_1 b_1^B + a_2 b_2^B,$$

очевидно

$$a_1 b_1^A + a_2 b_2^A \geq a_1 b_1^B + a_2 b_2^B.$$

Средняя эффективность ресурса:

$$\mu_1 = \frac{f(b)}{b_1} = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b_1}; \quad \mu_2 = \frac{f(b)}{b_2} = \frac{a_1 b_1}{b_2} + a_2.$$

Предельная эффективность ресурсов:

$$r_{b_1} = \frac{\partial f(b)}{\partial b_1} = a_1, \quad r_{b_2} = \frac{\partial f(b)}{\partial b_2} = a_2.$$

В данном случае предельная эффективность ресурса равна константе и зависит от величины постоянного коэффициента и никак не зависит от величины ресурсов:

$$r_{b_1 b_1} = r_{b_2 b_2} = 0.$$

Коэффициент эластичности:

$$E_{b_1} = \frac{r_{b_1}}{\mu_{b_1}} = \frac{a_1}{a_1 + \frac{a_2 b_2}{b_1}} = \frac{a_1 b_1}{a_1 b_1 + a_2 b_2} = \frac{a_1 b_1}{y};$$

$$E_{b_2} = \frac{r_{b_2}}{\mu_{b_2}} = \frac{a_2}{a_2 + \frac{a_1 b_1}{b_2}} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1 + a_2 b_2} = \frac{a_2 b_2}{y}.$$

Коэффициент эластичности линейной ПФ по i-му ресурсу прямо пропорционален величине ресурса и обратно пропорционален объему выпускаемой продукции. •

П р и м е р 2.3.2. Рассмотрим однофакторную степенную ПФ:

$$y = f(b) = ab^{\alpha},$$

где b – величина затрачиваемого ресурса, y – объем выпускаемой продукции, величины a и α – положительные числа, причем $\alpha \le 1$.

На графике (рис. 2.4) видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса b объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема выпускаемой продукции

Начертим график функции:

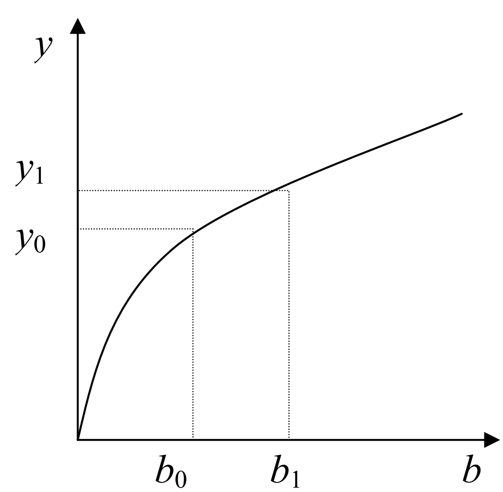


Рис. 2.4. Степенная производственная функция

Отмеченное обстоятельство отражает фундаментальное положение экономической теории (подтверждаемое практикой), называется законом убывающей эффективности производственной функции $y = f(b) = ab^{\alpha}$, которая является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

Для данной ПФ рассмотрим основные характеристики:

$y = f(b) = a \cdot 0^{\alpha} = 0$, если ресурс $b = 0$, то и выпуск равен нулю.

Средняя эффективность ресурса:

$$\mu_b = \frac{f(b)}{b} = \frac{ab^{\alpha}}{b} = ab^{\alpha-1},$$

так как $\alpha \le 1$, то данная функция является убывающей или $\mu = a$, если α = 1.

Предельная эффективность ресурса:

$$r_b = \frac{\partial f(b)}{\partial b} = a\alpha b^{\alpha-1} = \frac{\alpha a b^{\alpha}}{b} = \frac{\alpha y}{b}.$$

Предельная эффективность пропорциональна средней эффективности и всегда меньше ее.

Коэффициент эластичности:

$$E_b = \frac{r_b}{\mu_b} = \frac{a\alpha b^{\alpha-1}}{ab^{\alpha-1}} = \alpha.$$

В степенной ПФ степень является коэффициентом эластичности и показывает, на сколько процентов изменится выпуск продукции, если величина ресурса изменится на 1%. •

Задача 2.3.1. Малое предприятие предполагает наладить выпуск одного продукта тремя технологическими способами, по-разному распределяя основные фонды и трудовые ресурсы. Цена одной единицы выпускаемого продукта равна 1 ден. ед. Технологическая матрица имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Известно, что количество труда фиксировано $L = 4$ единицы. Требуется определить максимальную величину дохода в зависимости от величины затрачиваемых основных фондов K.

Решение. Определим неизвестные. Пусть x_1, x_2, x_3 – количество произведенной продукции соответственно I, П или Ш технологическим способом. Тогда целевая функция и ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le K \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

Это задача линейного программирования. Для решения данной задачи, т.е. определения ПФ, составим двойственную задачу ЛП. Вектор двойственных двумерный $y = (y_1, y_2)$. Напомним, что количество двойственных переменных соответствует количеству ограничений в прямой задаче ЛП. Тогда:

$$\begin{cases} Ky_1 + 4y_2 \to \min \\ 3y_1 + y_2 \ge 1 & (1) \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 1 & (2) \\ y_1 + 4y_2 \ge 1 & (3) \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Множество B имеет вид, представленный на рис 2.5.

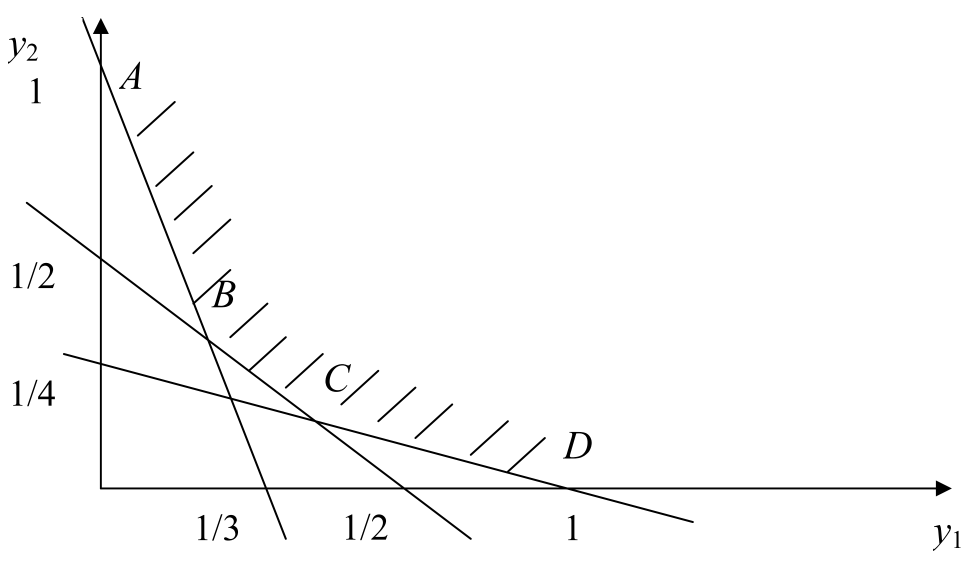


Рис. 2.5. Допустимое множество задачи

Вершины этого множества – $A(0,1)$; $B(1/4,1/4)$; $C(1/3,1/6)$; $D(1,0)$. В этих точках целевая функция является линейной функцией одной переменной:

$$f_A(K) = 4; \ f_B(K) = \tfrac{1}{4}K + 1; \ \ f_C(K) = \tfrac{1}{3}K + \tfrac{2}{3}; \ \ f_D(K) = K.$$

По определению производственной функции целевая функция является одновременно и производственной в этих точках. График производственной функции имеет вид (рис. 2.6):

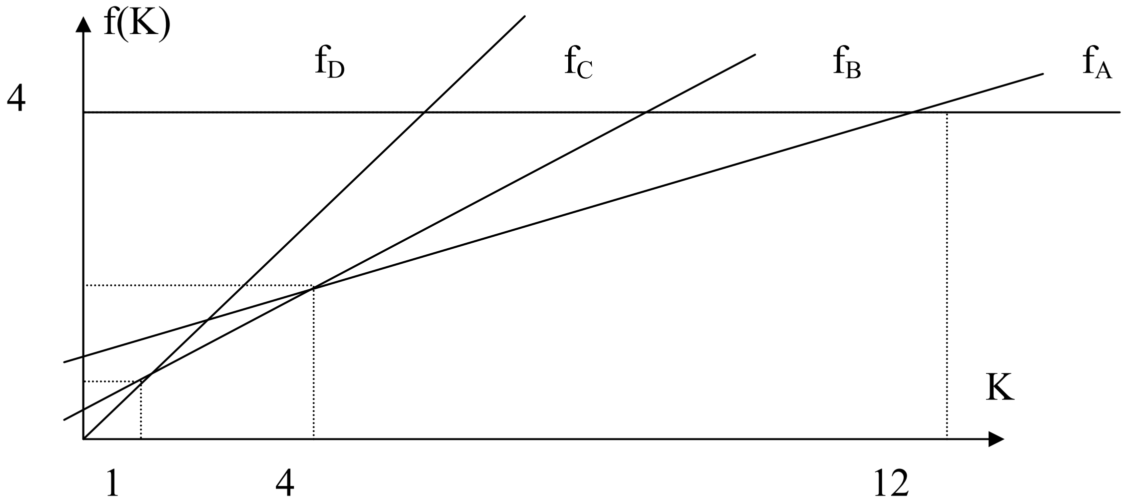


Рис. 2.6. Построение производственной функции

Эта кусочно-линейная функция может быть задана аналитически следующим образом:

$$f_A(K) = 4; \qquad \text{если } 0 < K < 1,$$

$$f_B(K) = \tfrac{1}{4}K + 1; \qquad \text{если } 1 < K < 4,$$

$$f_C(K) = \tfrac{1}{3}K + \tfrac{2}{3}; \qquad \text{если } 4 < K < 12,$$

$$f_D(K) = K\,; \qquad \text{если } K > 12.$$

Полученная функция дифференцируема во всех точках, кроме $K = 1$, 4, 12. Значение целевой функции при $K = 1$ одинаково для точек D и C, и, следовательно, для всех точек отрезка $[C,D]$. Это означает, что при $K = 1$ решение двойственной задачи не единственное. Аналогичная ситуация и при $K = 4$, $K = 12$. Таким образом, точки недифференцируемости производственной функции – точки, соответствующие значениям параметра K, для которых двойственная задача имеет не единственное решение.

Рассмотрим теперь основные свойства данной производственной функции и их экономический смысл.

Средняя эффективность ресурса – в данном случае средняя фондоотдача. Она определяется следующим образом:

$$\mu_K = \frac{f(K)}{K} = \begin{cases} 1, & K \in (0,1) \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3K}, & K \in (1,4) \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{K}, & K \in (4,12) \\ \frac{4}{K}, & K \in (12,\infty). \end{cases}$$

Отсюда видно, что кроме интервала (0,1), где фондоотдача постоянна, μ_K убывает, то есть с увеличением затрат капитала средняя фондоотдача падает. Этот вывод является естественным, но поскольку величина второго фактора остается неизменной, то вновь привлекаемые средства не обеспечиваются дополнительной рабочей силой, что и приводит к снижению средней фондоотдачи.

Предельная эффективность ресурса, имеющая в данном случае смысл предельной фондоотдачи, характеризует величину дополнительного эффекта от каждой дополнительной единицы затрачиваемых средств в данной точке (K,L). Предельная фондоотдача постоянна и равна значению соответствующей двойственной переменной везде, кроме точек K = 1, 4, 12.

$$r_K = \frac{\partial f(K)}{\partial K} = \begin{cases} 1, & K \in (0,1) \\ \frac{1}{3,} & K \in (1,4) \\ \frac{1}{4}, & K \in (4,12) \\ 0, & K \in (12,\infty). \end{cases}$$

Коэффициент эластичности характеризует процент прироста продукции при увеличении затрат на 1% и соответственно равен:

$$E_K = \frac{r_K}{\mu_K} = \begin{cases} 1, & K \in (0,1) \\ \frac{K}{K+2}, & K \in (1,4) \\ \frac{K}{K+4}, & K \in (4,12) \\ 0, & K \in (12,\infty). \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. *Построить* графики средней фондоотдачи, предельной фондоотдачи, коэффициента эластичности.
2. *Построить* производственную функцию по фактору L, считая, что значение K = 2. Указать основные характеристики производственной функции и построить их графики.
3. Для двухфакторной степенной производственной функции $y = ab_1^{\alpha} b_2^{\beta}$ *рассмотреть* основные характеристики.

2.4. Двухфакторная производственная функция

Как правило, в основном рассматривают двухфакторную производственную функцию, в которой через K обозначают объем основных фондов либо в стоимостном выражении, либо в количественном (например, число станков). Пусть L – числовое выражение объема трудовых ресурсов, то есть число работающих, число человеко-дней, человеко-часов и т.д. Y – объем выпущенной продукции в стоимостном выражении, либо в натуральном, если имеем дело с отраслью, выпускающий один продукт. Тогда производственная функция имеет вид:

$$Y = F(K, L). \tag{2.8}$$

В дальнейшем в качестве иллюстрации будем рассматривать одну из наиболее распространенных производственных функций – функцию Кобба–Дугласа. В 1928 г. появилась статья американских ученых экономиста П. Дугласа и математика Д. Кобба "Теория производства". В этой статье была предпринята попытка определить эмпирическим путем влияние величины затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Были использованы статистические данные за 1899–1922 гг. и поставлены следующие задачи:

1) определить класс функций, наиболее точно приближающий количественные соотношения между тремя выбранными характеристиками производственной деятельности.

2) найти числовые параметры, задающие конкретную функцию этого класса.

3) сравнить результаты, получаемые как значения функций, с фактическими характеристиками.

Предполагалось, что функция имеет вид:

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{2.9}$$

где $A > 0$ – константа, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Была составлена система уравнений

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t, \qquad 1899 \leq t \leq 1922,$$

где Y_t, K_t, L_t – фактическое значение соответствующих величин в год t. С помощью метода наименьших квадратов находились значения A, α, β, минимизирующих выражение

$$\sum_{t=1899}^{1922} (\ln Y_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2.$$

При этом оказалось, что $A = 1{,}01$, $\alpha = 0{,}25$, $\beta = 0{,}75$.

Ограничения, накладываемые на производственную функцию, заключались в требовании гладкости функции и в выполнении условий:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \qquad K, L > 0. \tag{2.11}$$

Каков же смысл этих условий? Условие (2.10) означает, что при малом увеличении объема одного из факторов производства и неизменном объеме другого выпуск объема производимого продукта возрастает. В соответствии с условием (2.11) при фиксированном объеме одного из факторов производства последовательное увеличение другого приводит к все меньшим проростам произведенного продукта.

Перейдем к обсуждению основных экономико-математических характеристик производственной функции:

Средняя производительность труда (производительность труда):

$$y = \frac{Y}{L}$$

– отношение объема произведенного продукта к количеству затрачиваемого труда.

Средняя фондоотдача (капиталоотдача):

$$z = \frac{Y}{K}$$

– отношение объема произведенного продукта к величине основных фондов. Для функции Кобба–Дугласа средняя производительность труда равна $y = \dfrac{Y}{K} = AK^{\alpha} L^{\beta - 1}$ и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией аргумента *L*, т.е. с увеличением затрат средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение: поскольку величина второго фактора *K* остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда.

***Фондовооруженность (капиталовооруженность)*:**

$$k = \frac{K}{L}$$

– объем основных фондов, приходящийся на одного работника.

***Предельная производительность труда*:**

$$v = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$$

характеризует величину дополнительного эффекта от каждой дополнительной единицы затрачиваемого труда в данной точке плоскости (K,L). Условия (3.2) показывают, что при неизменных основных фондах K и при увеличении численности работников L предельная производительность труда аналогично средней падает. Для функции Кобба–Дугласа $v = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} = \frac{\beta Y}{L}$, т.е. предельная производительность труда пропорциональна средней производительности и всегда меньше ее ($\beta < 1$).

***Предельная фондоотдача*:**

$$r = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

Характеристики "предельная и средняя производительность труда" и "фондоотдача" являются размерными величинами, связанными с абсолютными приростами. Рассмотрим величины, характеризующие процент прироста продукции при увеличении затрат ресурса на 1%. Такие показатели называются коэффициентами эластичности.

***Коэффициент эластичности по фондам*:**

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}. \tag{2.12}$$

Пусть приращению ΔK основных фондов при неизменном втором ресурсе L соответствует приращение ΔY объема выпуска. Тогда увеличение основных фондов на $\frac{\Delta K}{K} \cdot 100\%$ соответствует увеличению выпуска $\frac{\Delta Y}{Y} \cdot 100\%$. Следовательно, при увеличении объема основных фондов на 1% объем выпуска увеличится на $\frac{\Delta Y}{\Delta K}\frac{K}{Y}$ процентов. Переходя при $\Delta K \to 0$, получим выражение (2.12).

***Коэффициент эластичности по труду*:**

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}.$$

Параметры α и β в функции $Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ являются как раз коэффициентами эластичности. Таким образом, коэффициенты эластичности по факторам для функции Кобба–Дугласа являются величинами постоянными, не зависящими от значений K и L.

Отношение величины основных фондов к объему произведенного продукта $\frac{K}{Y}$ называется *фондоемкостью* (капиталоемкостью). Отношение количества затрачиваемого труда к объему произведенной продукции $\frac{L}{Y}$ называется *трудоемкостью.*

2.5. Неоклассическая производственная функция, условия однородности

Пусть $Y = F(K, L)$ – производственная функция, где Y – национальный доход, K – объем основных фондов, L – объем трудовых затрат. На производственную функцию часто накладывают дополнительные ограничения. Основное из них состоит в требовании однородности производственной функции.

Определение 5.1. Производственная функция называется однородной, если

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L) \tag{2.13}$$

для любого $\lambda > 1$. Число $\gamma > 0$ называется степенью однородности функции F.

Показатель γ характеризует эффект от расширения масштаба производства: если $\gamma > 1$, то одновременное увеличение всех факторов в γ раз приводит к возрастанию объема выпуска больше чем в λ раз, т.е. эффект от расширения масштаба производства положителен.

Наиболее часто употребляемыми являются линейно-однородные производственные функции, то есть $\gamma = 1$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda\, F(K, L). \tag{2.14}$$

Пример 2.5.1. Будем считать, что общество состоит из рабочих и предпринимателей. Тогда Y – национальный доход – распадается на две части: доход рабочих и прибыть предпринимателей.

Пусть средняя реальная заработная плата равна v, следовательно, суммарный доход равен vL.

В соответствии с теорией предельной производительности в условиях совершенной конкуренции общая занятость рабочей силы и заработная плата связаны соотношением $\frac{\partial F}{\partial L} = v$. Таким образом, нанимая рабочих, предприниматель увеличивает их численность на предприятии до тех пор, пока дополнительный доход $\frac{\partial F}{\partial L}$, приносимый очередным рабочим, не превосходит его заработной платы.

Величина $r = \frac{\partial F}{\partial K}$ представляет собой прибыль предпринимателей, которая описывает дополнительный доход от одной дополнительной единицы капитала, и называется нормой прибыли.

Таким образом,

$$Y = \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L = rK + wL, \tag{2.15}$$

где rK – прибыль предпринимателя, wL – доход рабочих.●

При изучении линейно-однородных производственных функций перейдем к новым переменным: $k = \frac{K}{L}$, $y = \frac{Y}{L}$. Обозначим

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = F(k, 1). \tag{2.16}$$

Рассмотрим основные характеристиками для случая линейно-однородной производственной функции $Y = F(K,L)$ или $y = f(k)$, где y – средняя производительность труда, k – фондовооруженность. В новых переменных получаем следующие характеристики:

- предельная производительность труда $v = f - kf'$ (величина v по смыслу и в силу (2.16) является возрастающей функцией аргумента k);
- предельная фондоотдача $r = f'$ (является убывающей функцией);
- коэффициент эластичности по фондам $\alpha = \frac{kf'}{f}$ (эта формула верна для любой однородной функции);

- коэффициент эластичности по труду $\beta = 1 - \frac{kf'}{f}$ (если степень однородности равна γ, то $\beta = \gamma - \frac{kf'}{f}$). Относительно поведения величин α и β заранее нельзя ничего сказать.

Утверждение 5.1. Если хотя бы один из коэффициентов эластичности α, β не зависит от *k*, то производственная функция является функцией Кобба-Дугласа.

Определение 5.2. Линейно-однородная производственная функция, удовлетворяющая условиям

$$f' > 0, \qquad f'' < 0, \qquad f(0) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$

называется *неоклассической*.

Перечисленные свойства можно интерпретировать так: при отсутствии основных фондов выпуск равен нулю; при ограниченном росте фондовооруженности объем выпуска также растет неограниченно; при возрастании фондовооруженности от нуля происходит стремительный рост объема выпуска, который при дальнейшем росте фондовооруженности сходит на нет. Функция Кобба–Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ является неоклассической.

Определение 5.3. Производственная функция называется динамической, если время *t* фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции. Параметры производственной функции и ее характеристики зависят от времени ***t.***

Пример 2.5.2. Неоклассическая модель роста. Поставим перед собой задачу: описать динамику фондовооруженности или представление ее как функции от времени ***t.*** Как в любой модели, необходимо сделать соответствующие предположения и ввести ряд определяющих параметров.

Пусть выполняются следующие предположения:

имеет место естественный прирост во времени трудовых ресурсов:

$$\frac{dL}{dt} = L' = \alpha L(t), \tag{2.17}$$

инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов и на амортизацию, т.е.

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + \beta K(t) = K' + \beta K(t), \tag{2.18}$$

где β – норма амортизации.

Тогда, если l∈(0,1) – норма инвестиций, то

$$I(t) = lY(t) = K' + \beta K(t),$$

или

$$\frac{dK}{dt} = K' = lF(K(t), L(t)) - \beta K(t). \tag{2.19}$$

Прологарифмировав коэффициент фондовооруженности $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$, получим: $\ln k(t) = \ln K(t) - \ln L(t)$.

Дифференцируя это выражение по t, имеем:

$$\frac{k'}{k(t)} = \frac{K'}{K(t)} - \frac{L'}{K(t)}.$$

Подставив в полученное равенство выражения (2.17) и (2.19), получаем уравнение относительно неизвестной функции k:

$$\frac{dk}{dt} = k' = lf(k(t)) - (\alpha + \beta)k(t), \tag{2.20}$$

где функция $f(k)$ определена согласно формуле (2.16).

Полученное соотношение (2.20) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Выделим стационарное решение этого уравнения. Из условия $k' = 0$ следует, что:

$$lf(k(t)) - (\alpha + \beta)k(t) = 0, \tag{2.21}$$

т.е. $k(t) = const$ – постоянная величина, являющаяся корнем этого нелинейного алгебраического уравнения. •

Задача 2.5.1. Для производственной функции $F(K, L) = \sqrt{KL}$ найти интегральные кривые уравнения (2.20) и стационарное решение.

Из (2.16) следует, что $f(k(t)) = \sqrt{k(t)}$, и тогда уравнение (2.20) имеет вид:

$$\frac{dk}{dt} = l\sqrt{k(t)} - (\alpha + \beta)k(t). \tag{2.22}$$

Стационарное решение этого уравнения следует из равенства:

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0,$$

откуда получаем ненулевое частное решение уравнения

$$k_{st} = \frac{l^2}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Дифференциальное уравнение (2.22) решаем методом разделения переменных:

$$\frac{dk}{\sqrt{k(t)}[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k(t)}]} = dt.$$

Интегрируя это уравнение, используя замену переменных ($\sqrt{k} = z$), получаем его общее решение в окончательном виде:

$$k(t) = \left[\frac{1}{(\alpha + \beta)} + C\exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right)\right]^2. \qquad (2.23)$$

Семейство интегральных кривых сходится сверху и снизу к стационарному решению рис. 2.7: т.е. $k \to k_{st}$ при $k \to \infty$. Следовательно, при неизменных параметрах задачи l, α и β функция фондовооруженности в данном случае устойчиво стремится к стационарному значению независимо от начальных условий. Стационарная точка $k = k_{st}$ является точкой устойчивого равновесия.

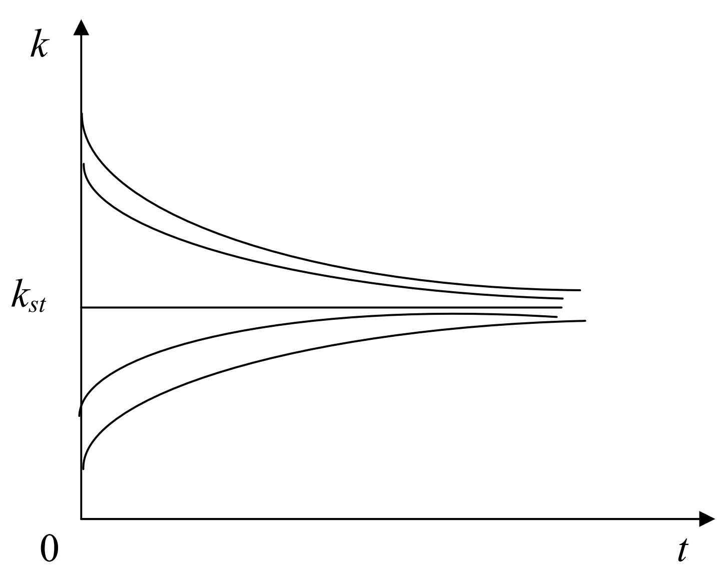


Рис. 2.7. Устойчивое равновесие

Другим распространенным классом производственных функций являются такие, для которых какая-либо из величин (v, r, α, β) является постоянной, не зависящей от величины фондовооруженности k.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Доказать*, что производственная функция $F(K,L)=AK^{1/3}L^{2/3}$ является неоклассической производственной функцией.
2. Для производственной функции $F(K,L)=AK^{1/3}L^{2/3}$ *найти* интегральные кривые уравнения (5.8) и стационарное решение.
3. Допустим, производственная функция фирмы в краткосрочном периоде описывается формулой: $Q = 100L + 50L^2 - 3L^3$.
   Определите:
   а) с какого числа работников начинает наблюдаться уменьшающаяся отдача от масштаба (отрицательный эффект масштаба)?
   б) при каком уровне занятости достигается максимальный объем производства?

2.6. Изокванты

Определение 6.1. Множество (линия) l_q уровня $q = f(b_1, b_2)$, где $q > 0$ – действительное число производственной функции, называется изоквантой. Иными словами, линии уровня q – множество точек, на котором значение производственной функции постоянно и равно q.

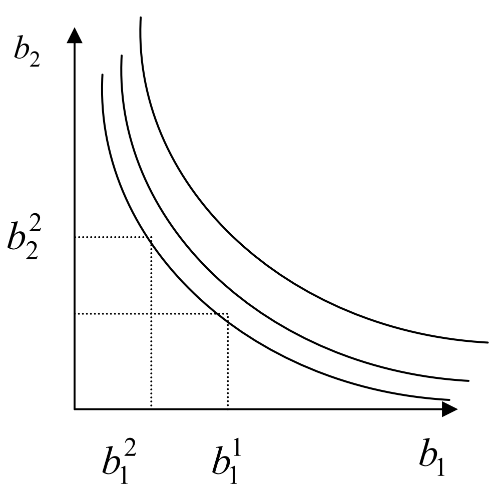


Рис. 2.8

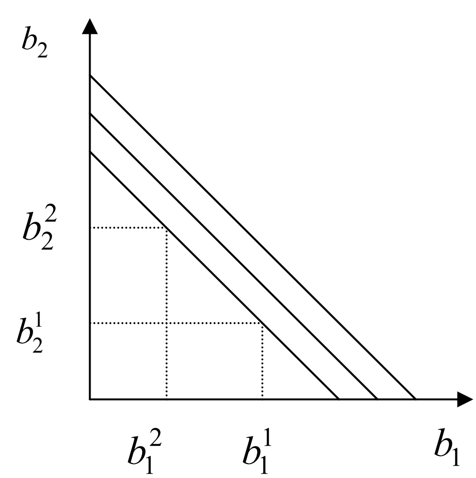


Рис. 2.9

Изокванты

Различные наборы ресурсов (b_1^1, b_2^1) и (b_1^2, b_2^2) принадлежат одной изокванте l_q, т.е. $q = f(b_1^1, b_2^1) = f(b_1^2, b_2^2)$ дает один и тот же объем выпуска q. Изокванта l_{q_2}, расположенная выше изокванты l_{q_1} соответствует большему объему выпуска ($q_2 > q_1$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Для производственной функции $F(K,L)=AK^{1/3}L^{2/3}$ *построить* изокванты.
2. *Нарисовать* изокванты для линейной производственной функции из задачи 3.1 и задачи 5.1.

2.7. Предельная норма замены факторов производства

Определение 7.1. *Предельной нормой замены (замещения) i*-го ресурса *j*-м производственной функции $y=f(b_1,b_2)$ называется величина, равная

$$MRTS_{ij}=-\frac{db_j}{db_i},\ i,j=1{,}2 \tag{2.24}$$

при постоянном *y*.

Необходимо понимать, что *i* – номер заменяемого ресурса, *j* – номер замещающего ресурса. Используется также термин "предельная технологическая норма замены (замещения) *i*-го ресурса (фактора производства) *j*-м ресурсом (фактором производства)". Иногда $MPTS_{ij}$ называют нормой замены ресурсов.

Пусть выпуск *y* является постоянным (т.е. все наборы затрат ресурсов находятся на одной изокванте), тогда первый полный дифференциал *dy* производственной функции $y=f(b_1,b_2)$ тождественно равен нулю:

$$0=dy=\frac{\partial f(b)}{\partial b_j}db_j+\frac{\partial f(b)}{\partial b_i}db_i,\qquad i,j=1{,}2. \tag{2.25}$$

Выражая первый дифференциал db_j получим:

$$db_j=-\frac{\dfrac{\partial f(b)}{\partial b_i}}{\dfrac{\partial f(b)}{\partial b_j}}db_i,\qquad i,j=1{,}2.$$

Поделив на db_i получим:

$$\frac{db_j}{db_i}=-\frac{\dfrac{\partial f(b)}{\partial b_i}}{\dfrac{\partial f(b)}{\partial b_j}},\qquad i,j=1{,}2.$$

Следовательно:

$$MRTS_{ij} = -\frac{db_j}{db_i} = \frac{\dfrac{\partial f(b)}{\partial b_i}}{\dfrac{\partial f(b)}{\partial b_j}} > 0, \qquad i \neq j, \quad i, j = 1{,}2. \qquad (2.26)$$

Пусть производственная функция – двухфакторная. Непосредственно проверяется справедливость равенства

$$MRTS_{12} = \frac{E_1}{E_2}\frac{b_2}{b_1},$$

т.е. предельная норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичности выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

При постоянном выпуске y и малых приращениях Δx_1 и Δx_2 имеем приближенное равенство

$$MRTS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}.$$

Следовательно, величина $MRTS_{12}$ показывает, на сколько единиц увеличатся затраты второго ресурса (при неизменном выпуске y), если затраты первого ресурса уменьшатся на одну единицу.

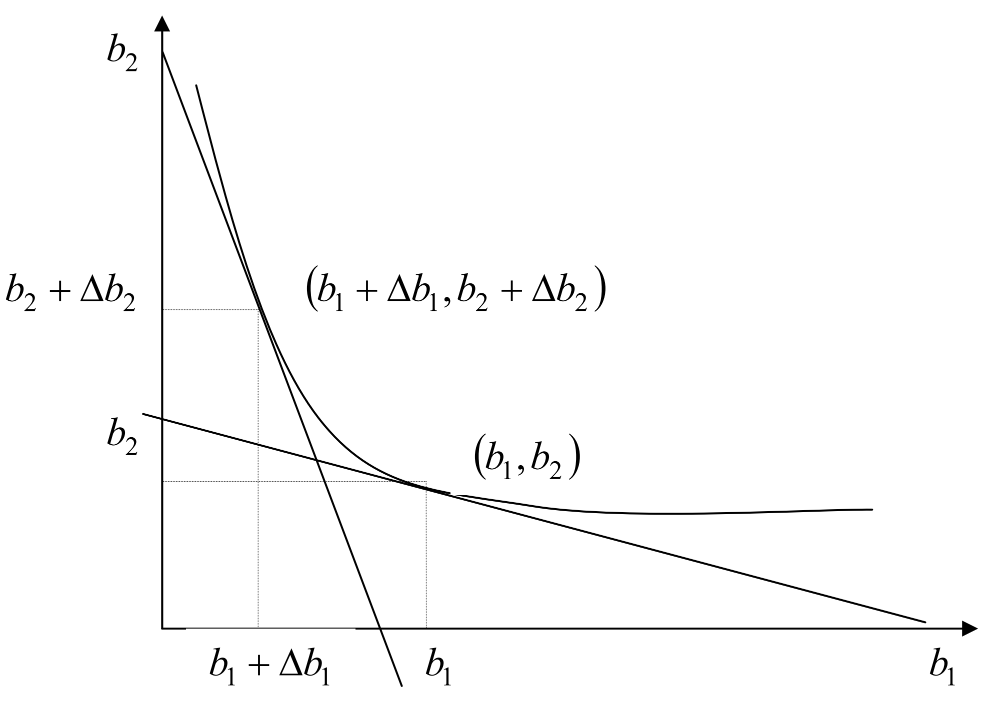


Рис. 2.10. Предельная норма замещения

Чем круче касательная к изокванте в точке (b_1, b_2), тем больше значение выражения $MRTS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1}$ и, следовательно, норма замены первого ресурса вторым.

П р и м е р 2.7.1. Для производственной функции вида $y = a_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$ выписать в явном виде выражения $MRTS_{12}$ и $MRTS_{21}$.

Р е ш е н и е.

$$MRTS_{12} = \frac{\partial y}{\partial b_1} \Big/ \frac{\partial y}{\partial b_2} = \frac{a_1}{a_2}; \quad MRTS_{21} = \frac{\partial y}{\partial b_2} \Big/ \frac{\partial y}{\partial b_1} = \frac{a_2}{a_1}. \bullet$$

Рассмотрим производственную функцию Кобба–Дугласа:

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}.$$

Предположим, что объем L трудовых ресурсов уменьшился на ΔL. Вопрос: на какую величину ΔK следует увеличить объем K основных фондов, чтобы выпуск Y остался неизменным?

Считая Y константой, возьмем полный дифференциал от обеих частей уравнения $Y = F(K, L)$:

$$0 = dY = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL. \quad (2.27)$$

Предельной нормой замены S_{LK} трудовых ресурсов L основными фондами K называется величина

$$MRTS_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)}. \quad (2.28)$$

Аналогично выводится показатель $MRTS_{KL}$, причем $MRTS_{LK}$ и $MRTS_{KL}$ связаны простым соотношением $MRTS_{LK} \cdot MRTS_{KL} = 1$.

Чтобы при изменении количества используемых факторов производства выпуск оставался неизменным, количество труда и капитала должно изменяться в разных направлениях. Если количество капитала сокращается $(\Delta K < 0)$, то количество труда должно увеличиваться $(\Delta L > 0)$. Поэтому отношение $\frac{dK}{dL}$ всегда отрицательное.

Между тем предельная норма технического замещения представляет собой пропорцию, в которой один фактор производства может быть замещен другим, поэтому $MRTS_{LK} > 0$.

Для однородной производственной функции можно получить более простое выражение для $MRTS_{KL}$, поскольку в данном случае

$$Y = F(K, L) = L^{\gamma} f\left(\frac{K}{L}\right), \tag{2.29}$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial L} = L^{\gamma - 1}\left(\gamma f(k) - kf'(k)\right); \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\gamma - 1} f'(k). \tag{2.31}$$

Отсюда следует:

$$MRTS_{LK} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k. \tag{2.32}$$

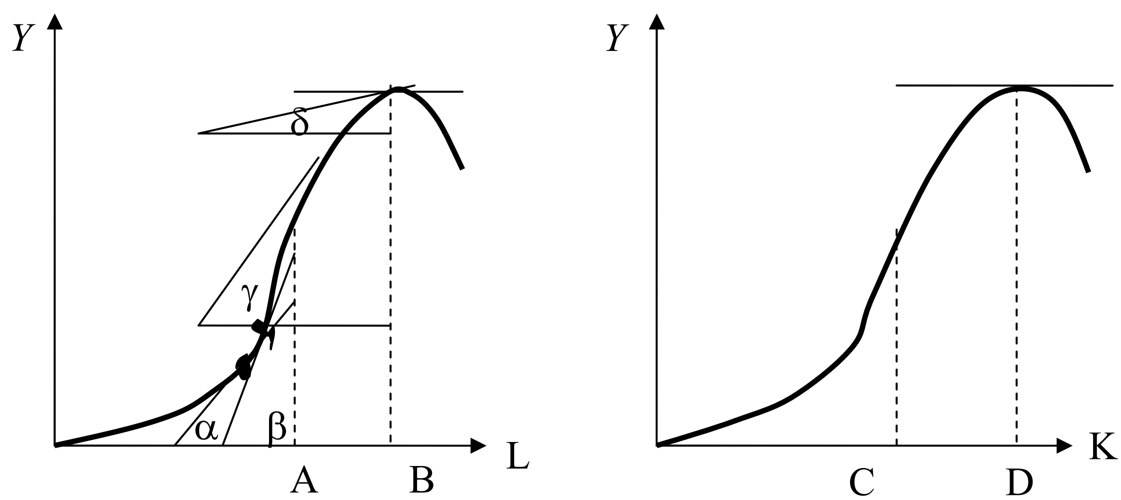
Таким образом, для однородной производственной функции норма замены зависит только от величины k фондовооруженности. Для производственной функции Кобба–Дугласа

$$MRTS_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} k. \tag{2.33}$$

Отсюда видно, что норма замены $MRTS_{LK}$ прямо пропорциональна фондовооруженности, что вполне естественно: чем выше фондовооруженность, тем больше требуется основных фондов для компенсации трудовых ресурсов.

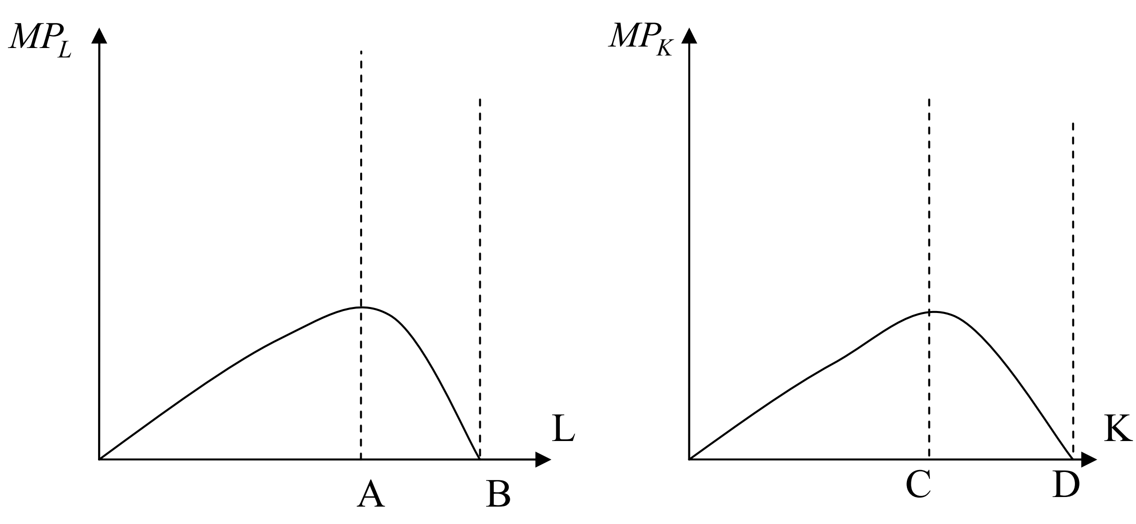
Предположим, что количество используемого капитала фиксировано. Тогда выпуск можно представить как функцию только одного фактора – труда: $Y = f(L)$. Проиллюстрируем такую функцию на рис. 2.11.

Соответствующая динамика предельного продукта труда представлена на рис. 2.12а. На отрезках ОА (рис.2.11а и 2.12а) предельный продукт труда не только положителен $\left(\frac{dY}{dL} > 0\right)$, но и возрастает $(tg\alpha < tg\beta)$. На отрезках AB $MP_L > 0$, но убывает $(tg\delta < tg\gamma)$. На отрезке правее B $MP_L < 0$ и убывает. Заметим, что способы производства (сочетания факторов K и L), соответствующие отрезку правее B и характеризующиеся отрицательным предельным продуктом труда, неэффективны, поскольку имеется возможность обеспечивать тот же выпуск при меньшем количестве труда. Способы производства, соответствующие отрезку OA, характеризуются тем, что в них задействовано относительно избыточное количество капитала, то есть имеются свободные производственные мощности, которые и позволяют подключать добавочные трудовые ресурсы, не снижая предельной производительности.



а) труд б) капитал

Рис. 2.11. Производственная функция с одним переменным фактором



а) труд б) капитал

Рис. 2.12. Динамика предельного продукта

Это означает, что выпуск продукции, получаемый при таких способах производства, может быть обеспечен при неизменном количестве труда, но при меньшем количестве капитала. Поэтому рассматриваемые способы производства также, по определению, неэффективны. Аналогичным образом можно представить выпуск как функцию капитала при неизменном количестве труда и проследить динамику предельного продукта капитала (рис. 2.11б и рис. 2.12б). Здесь технически неэффективными являются способы производства, расположенные на отрезке OC и отрезке, расположенном правее D.

Технически эффективными могут быть признаны только способы производства, соответствующие отрезкам AB и CD. Только они отражаются производственной функцией. Но для этих способов производства предельный продукт факторов всегда положителен и убывает, а это доказывает справедливость утверждения о том, что производственная функция характеризуется убывающей $MRTS_{LK}$, а изокванты как способ выражения производственной функции выпуклы к началу координат.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для производственной функции $y = ab_1^{\alpha} b_2^{\beta}$, где a, α и β – константы, *рассчитать* предельную норму замены $MRTS_{12}$ и $MRTS_{21}$.
2. *Доказать*, что производственная функция $F(K, L) = aK + bL$, где a и b – константы – линейно-однородная функция с постоянной нормой замены.
3. *Доказать* равенства (7.7), (7.8), (7.9) и (7.10).

2.8. Эластичность замены факторов производства, производственная функция CES

Для однородных производственных функций введем понятие эластичности замены факторов производства. При изменении показателя $k = \dfrac{K}{L}$ фондовооруженности на 1% значение нормы замены $MRTS_{LK}$ меняется на $\dfrac{dMRTS_{LK}}{dk} \cdot \dfrac{k}{MRTS_{LK}}$ %. Следовательно, для того чтобы добиться изменения нормы замены на 1%, необходимо изменить величину фордовооруженности на $\left(\frac{dMRTS_{LK}}{dk}\cdot\frac{k}{MRTS_{LK}}\right)^{-1}\%$.

Данная величина называется эластичностью замены факторов и обозначается

$$\sigma_K = \left(\frac{dMRTS_{LK}}{dk}\cdot\frac{k}{MRTS_{LK}}\right)^{-1}. \tag{2.34}$$

Для геометрической интерпретации эластичности замены факторов отобразим одну из изоквант l_Y производственной функции $Y = const$ на плоскости (K,L) и обозначим ее цифрой (1).

Возьмем на изокванте l_Y две произвольные точки А и В. Тогда предельная норма замены в точке А – тангенс угла наклона касательной к изокванте в точке А $(tg\alpha)$.

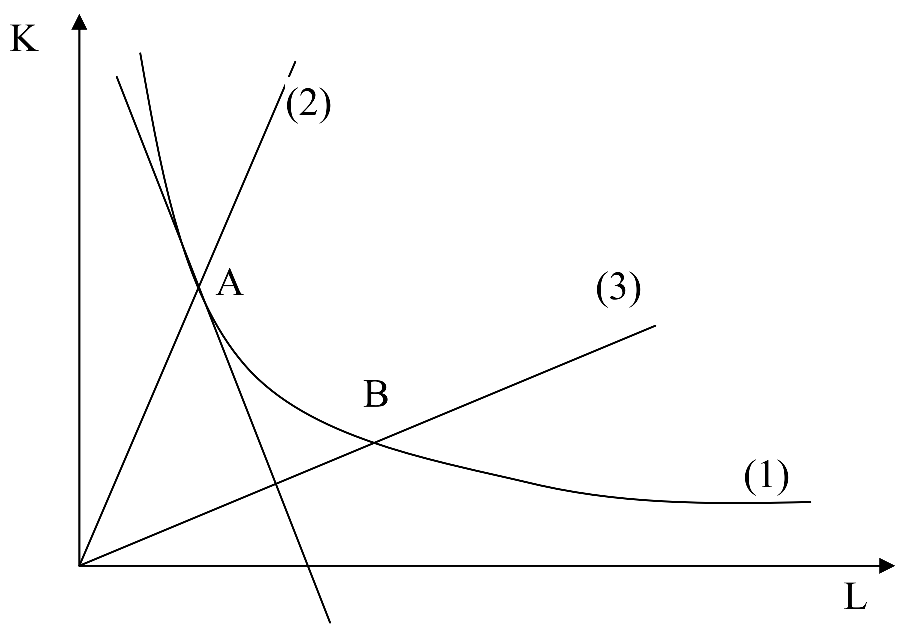


Рис. 2.13. Предельная норма замещения

При перемещении из точки А в точку В по изокванте наклон касательных будет меняться, соответственно меняется и величина фондовооруженности $k = \frac{K}{L}$. Эта величина постоянна вдоль любой прямой, проходящей через начало координат (например, вдоль прямых (2) и (3). Величина $\frac{1}{\sigma}$ показывает относительное изменение тангенса угла наклона линии уровня в расчете на единицу изменения фондовооруженности. Очевидно, что, чем сильнее меняется наклон линии уровня при переходе, например, из точки А в точку В (с прямой (2) на прямую (3), тем больше "кривизна" линии уровня.

Подставляя выражение для S_{LK}, получим:

$$\sigma_K = -\frac{\gamma f'(f - kf')}{k\left((1-\gamma)(f')^2 + ff''\right)}. \tag{2.35}$$

Подставляя выражение для S_{LK}, получим:

$$\sigma_K = -\frac{\gamma f'(f - kf')}{k\left((1-\gamma)(f')^2 + ff''\right)}. \tag{2.35}$$

Аналогично вводится эластичность замены σ_L первого фактора K вторым L по формуле:

$$\sigma_L = \frac{dMRTS_{KL}}{dk^{-1}} \cdot \frac{k^{-1}}{MRTS_{KL}}, \tag{2.36}$$

и, следовательно, $\sigma_K = \sigma_L$. Поэтому для обозначения эластичности будем употреблять символ σ, опуская значок, указывающий фактор.

Особый интерес представляет случай, когда эластичность замены σ является постоянной. Класс производственных функций с постоянной эластичностью замены называют *функциями CES (Constant Elasticity of Substitution)*. Она представлена на рис. 2.14 и допускает простое описание. Для его определения достаточно решить дифференциальное уравнение:

$$\sigma = -\frac{f'(f - kf')}{k\left((1-\gamma)(f')^2 + ff''\right)},$$

считая величину σ заданной константой или эквивалентное уравнение:

$$\frac{dk}{dMRTS} \cdot \frac{MRTS}{k} = \sigma. \tag{2.37}$$

Решая данное уравнение, имеем:

$$MRTS = Ck^{\frac{1}{\sigma}},$$

где C – произвольная константа. Используя выражение для нормы замещения S, получаем уравнение

$$\frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{k + Ck^{\frac{1}{\sigma}}} \tag{2.38}$$

или

$$\ln f = \gamma \int \frac{dk}{k + Ck^{\frac{1}{\sigma}}}. \tag{2.39}$$

Интеграл в правой части вычисляется непосредственно заменой переменных $k = t^{\frac{\sigma}{(\sigma-1)}}$ и равен $\frac{\sigma}{\sigma-1} \ln C_1 \left(k^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} + C \right)$, где C_1 – произвольная константа.

Таким образом, общее решение уравнения (2.37) имеет вид:

$$f = C_1 \left(k^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} + C \right)^{\frac{\gamma\sigma}{(\sigma-1)}}. \tag{2.40}$$

Возвращаясь от фондовооруженности k к переменным K и L, получаем:

$$Y = C_1 \left(K^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} + CL^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma\sigma}{(\sigma-1)}}. \tag{2.41}$$

Обозначая через $\rho = \frac{(1-\sigma)}{\sigma}$ и выбирая подходящие константы C_1 и C, мы получим общее уравнение (2.37), которое будет иметь следующий вид:

$$Y = F(K, L) = A\left(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}, \tag{2.42}$$

где $A > 0,\ 0 < \gamma \le 1, \quad \rho \ge -1$. Два последних условия обеспечивают выполнение требований (2.10) и (2.11). Форма записи (2.42) решения уравнения (2.37) является общепринятым видом производственной функции класса CES. Эластичность замены факторов постоянна и равна

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}. \qquad (2.43)$$

Рассмотрим основные производственные функции с постоянной эластичностью замены σ. Приведенное решение годится лишь для случая $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$.

При $\rho \to 0$ в пределе получаем производственную функцию Кобба–Дугласа $Y = AK^{\alpha} L^{\beta}$ с $\sigma = 1$.

Случай $\sigma = 0$ можно получить предельным переходом $\sigma \to 0 \ (\rho \to \infty)$ из формулы (2.42):

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} = \min\left\{ K^{\gamma}, L^{\gamma} \right\}. \qquad (2.44)$$

Полученная производственная функция называется *производственной функцией с фиксированными пропорциями*. Ее часто записывают в виде

$$F(K, L) = \min\left\{ aK^{\gamma}, bL^{\gamma} \right\}. \qquad (2.45)$$

При $\gamma = 1$ получаем так называемую функцию Леонтьева $Y = \min\{aK, bL\}$, изображенную на рис. 2.15. Здесь коэффициент a имеет смысл фондоотдачи, коэффициент b соответствует производительности труда. С точки зрения экономики равенство $\sigma = 0$ означает отсутствие замещения факторов, что вполне согласуется с характером равенства (2.44); в случае $K \neq L$ полностью используется фактор, имеющийся в минимальном количестве, а второй остается использованным не полностью.

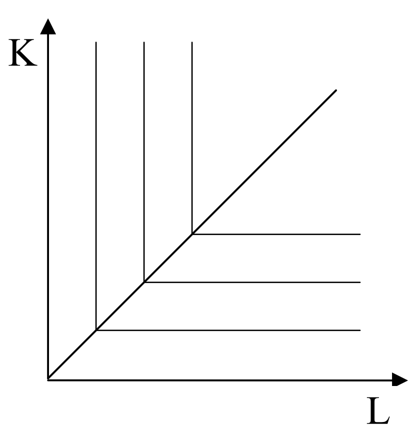


Рис. 2.14

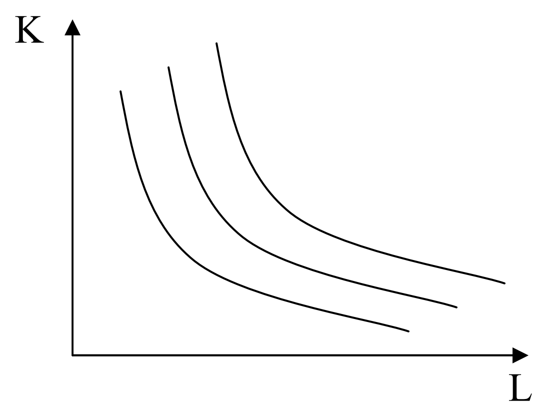


Рис. 2.15

Эластичность предельной нормы замещения

Если $\rho = -1$, то получаем производственную функцию с линейными изокватнами, в частности линейной является функция. $y = aK + bL + c$. Линейная производственная функция имеет нулевую "кривизну", следовательно, бесконечную эластичность замещения.

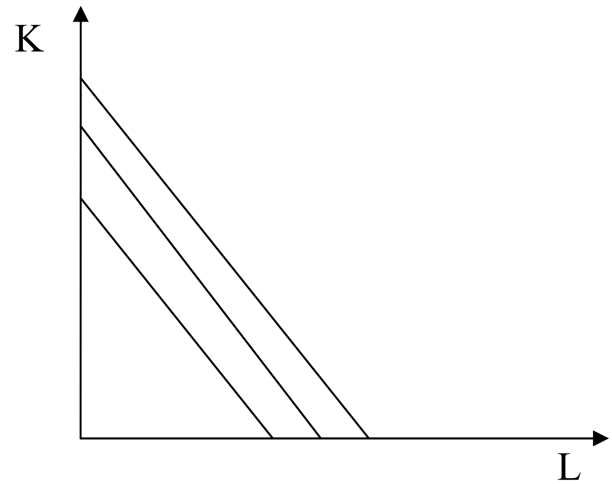


Рис. 2.16. Эластичность

Задачи для самостоятельного решения

1. *Проверить*, что для производственной функции Кобба–Дугласа эластичность замены постоянна и равна 1, т.е. $\sigma_K = \sigma_L = 1$.
2. Для производственной функции

$$Y = 1{,}002 \cdot \left(0{,}6412 \cdot K^{-0{,}81} + 0{,}3588 \cdot L^{-0{,}81}\right)^{-\frac{1}{0{,}81}}$$

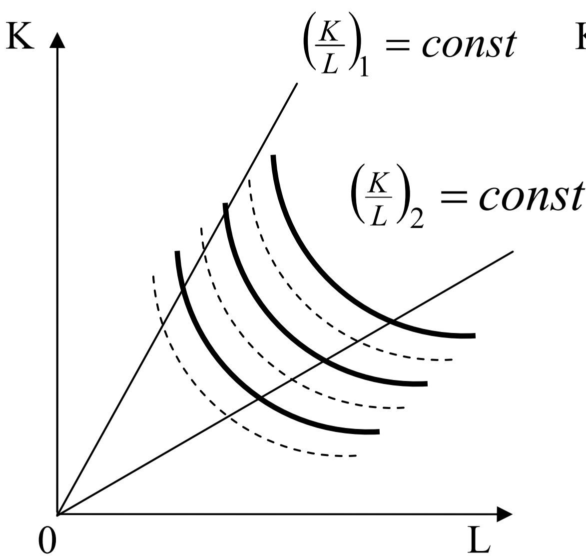
   рассчитать эластичность замены факторов и доказать, что она является константой.
3. *Оцените* эластичность замещения факторов для следующих функций:
   $Q = K^{1/2}L^{2/3}$;
   $Q = K^{1/2}L^{1/3}$;
   $Q = K^{1/8}L^{1/4}$;
   $Q = (K^{1/3} + L^{1/3})^3$;
   $Q = (K^{1/4} + L^{1/4})^4$.

2.9. Технический прогресс

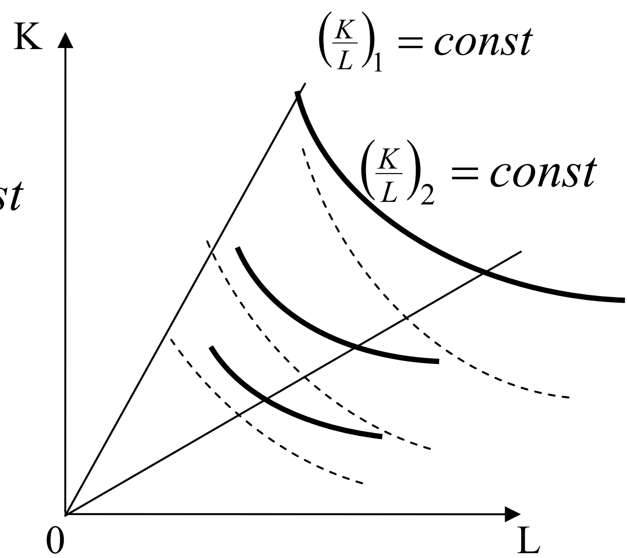
До сих пор мы предполагали уровень технологического развития неизменным. Но для общества характерен технический прогресс. Рассмотрим его влияние на производство, используя аппарат производственных функций.

Технический прогресс, выражающийся в совершенствовании техники, технологии, появлении новых, прогрессивных методов организации производства, повышении квалификации работников и т.п., позволяет при прежнем количестве используемых ресурсов производить большее количество продукции или оставить выпуск на прежнем уровне при меньшем количестве ресурсов. Это явление может быть проиллюстрировано смещением карты изоквант к началу координат (рис. 2.17 а, б, в).

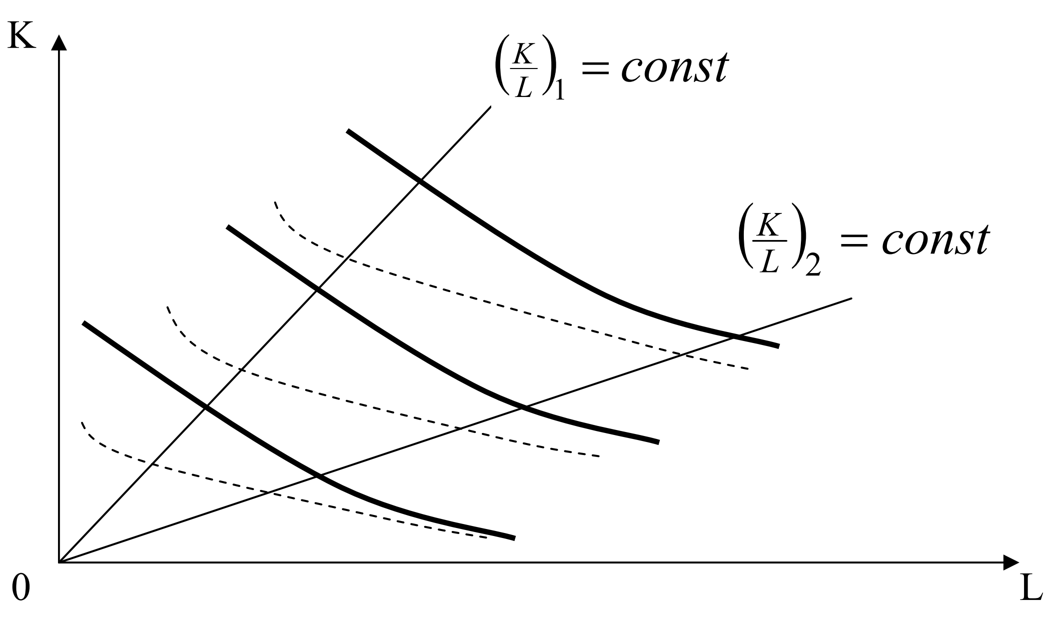
Сплошные изокванты характеризуют производство до нововведений. Сдвиг изоквант в положение пунктирных линий характеризует влияние технического прогресса.



а) нейтральный
технический прогресс



б) трудоинтенсивный
технический прогресс



в) капиталоинтенсивный технический прогресс

Рис. 2.17. Влияние технического прогресса на выпуск

Различают три типа технического прогресса: капиталоинтенсивный (трудосберегающий), трудоинтенсивный (капиталосберегающий) и нейтральный. Капиталоинтенсивный технический прогресс имеет место тогда, когда в результате нововведений при прежнем соотношении затрат труда и капитала $\left(\frac{K}{L} = const\right)$ $MRTS_{LK}$ снижается. Такой тип технического прогресса проиллюстрирован на рис. 2.17в. Изокванты не только сдвигаются к началу координат, но становятся более пологими во всех точках, лежащих на одних и тех же лучах, проведенных из начала координат, где соотношение $\frac{K}{L}$ неизменно.

Трудоинтенсивный технический прогресс имеет место тогда, когда при неизменном соотношении $\frac{K}{L}$ $MRTS_{LK}$ повышается. Его иллюстрирует рис. 2.17б, на котором изокванты, сдвигаясь к началу координат, становятся круче.

Технический прогресс называют нейтральным, если при неизменном уровне капиталовооруженности труда $MRTS_{LK}$ также остается неизменной (рис. 2.17а).

Так как технический прогресс приводит к росту выпуска при неизменном количестве ресурсов, он всегда сопровождается ростом производительности (среднего продукта) всех факторов производства. Но это не означает, что обязательно должна повышаться предельная производительность (предельный продукт) всех факторов. Динамика предельного продукта при техническом прогрессе зависит от вида производственной функции. Предельные продукты труда и капитала могут повышаться, снижаться или оставаться неизменными при любом типе технического прогресса. Важно то, что при неизменной капиталовооруженности труда отношение предельных продуктов $\frac{MP_L}{MP_K}$, т.е. $MRTS_{LK}$ при капиталоинтенсивном техническом прогрессе снижается, при трудоинтенсивном растет и при нейтральном не изменяется.

На практике технологические изменения, как правило, сопровождаются изменением количества ресурсов, используемых в производственном процессе. При этом важно определить, в какой степени рост выпуска связан с увеличением объема факторов производства и в какой мере он является результатом технического прогресса.

Введем в производственную функцию $A(t)$, который характеризует изменения, связанные с техническим прогрессом (A есть функция от t). Поскольку K и L тоже меняются во времени (динамическая производственная функция), она будет иметь вид:

$$Y = A(t) f\big(K(t), L(t)\big). \tag{2.46}$$

Продифференцируем данное уравнение по переменной времени:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dt} f(K,L) + A\frac{df(K,L)}{dt}. \tag{2.47}$$

Умножим первое слагаемое правой части на $1 = \frac{A}{A}$, и второе слагаемое – на $1 = \dfrac{f(K,L)}{f(K,L)}$. Учитывая уравнение (2.46), получим равенство:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{Y}{A} + \frac{Y}{f(K,L)}\left(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\right). \tag{2.48}$$

Разделим все члены уравнения на выпуск продукции Y и получим равенство:

$$\frac{dY/dt}{Y} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial f/\partial K}{f(K,L)} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\partial f/\partial L}{f(K,L)} \cdot \frac{dL}{dt}. \tag{2.49}$$

Умножим второе слагаемое правой части на $1 = \dfrac{K}{K}$, и третье слагаемое – на $1 = \dfrac{L}{L}$. Получим:

$$\frac{dY/dt}{Y} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial f}{\partial K} \cdot \frac{K}{f(K,L)} \cdot \frac{dK/dt}{K} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{L}{f(K,L)} \cdot \frac{dL/dt}{L}. \tag{2.50}$$

Отношение $\dfrac{dY/dt}{Y} = G_Y$ характеризует относительный прирост выпуска за период t, или темп прироста выпуска. Аналогично этому $\dfrac{dK/dt}{K} = G_K$ характеризует темп прироста капитала, $\dfrac{dL/dt}{L} = G_L$ – темп прироста трудовых ресурсов и $\dfrac{dA/dt}{A} = G_A$ – темп технического прогресса (темп прироста выпуска за счет технического прогресса).

Перепишем уравнение (2.50) в новых обозначениях:

$$G_Y = G_A + \frac{\partial f}{\partial K} \cdot \frac{K}{f(K,L)} \cdot G_K + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{L}{f(K,L)} \cdot G_L. \qquad (2.51)$$

Параметр $\dfrac{\partial f}{\partial K} \dfrac{K}{f(K,L)} = \dfrac{\partial Y}{\partial K} \cdot \dfrac{K}{Y}$ представляет собой стандартную формулу коэффициента эластичности. Это эластичность выпуска по затратам капитала. Обозначим этот коэффициент ε_{YK}. Он показывает, на сколько процентов изменится выпуск продукции, если затраты капитала изменятся на 1%.

Соответственно параметр $\dfrac{\partial f}{\partial L} \dfrac{L}{f(K,L)} = \dfrac{\partial Y}{\partial L} \cdot \dfrac{L}{Y}$ представляет коэффициент эластичности выпуска по затратам труда ε_{YL}.

В символах коэффициентов эластичности уравнение (2.51) будет выглядеть следующим образом:

$$G_Y = G_A + \varepsilon_{YK} \cdot G_K + \varepsilon_{YL} \cdot G_L.$$

Данное уравнение позволяет определить, в какой мере прирост выпуска (на предприятии, в отрасли, в группе отраслей или в экономике в целом) обусловлен изменением количества применяемых ресурсов $(\varepsilon_{YK} K + \varepsilon_{YL} L)$ и в какой – техническим процессом G_A.

3. ТЕОРИЯ ИЗДЕРЖЕК ПРОИЗВОДСТВА

Ранее мы выяснили, что определенную величину выпуска можно производить при различных технически эффективных способах производства. Какой из них выбрать, каких издержек потребует данный выпуск и как будут изменяться издержки, если фирма решит изменить объем производства? Это мы постараемся выяснить.

3.1. Определение издержек

Различают капитальные и текущие издержки производства.

Капитальные издержки – затраты на приобретение или создание элементов основного капитала, которые длительное время используются в процессе производства, но потребляются постепенно. Такие издержки возмещаются фирме по частям в составе выручки от реализации каждой партии товаров. К капитальным издержкам относятся, в частности, затраты на приобретение и строительство зданий, сооружений, машин, оборудования и т.п.

Текущие издержки – затраты на ресурсы, потребленные в течение определенного периода времени. К ним относятся, в частности, затраты на сырье, материалы, оплату труда и другие ресурсы, в том числе затраты, соответствующие стоимости износа основного капитала за данный период. Капитальные издержки характеризуют начальную стоимость "запаса" основного капитала фирмы (стоимость фирмы). Текущие издержки характеризуют стоимость потока ресурсов в единицу времени. В данном разделе изучаются текущие издержки производства.

Различают экономические и бухгалтерские текущие издержки. Они отличаются тем, что:

во-первых, бухгалтерские издержки включают только те выплаты и начисления, которые должны быть учтены в соответствии с законодательными актами о бухгалтерском учете. Экономические издержки включают все явные издержки, т.е. все платежи, которые необходимо осуществить для производства и реализации продукции. Если, например, производственная необходимость требует осуществления каких-либо неофициальных выплат (так называемым черным налом), то они не могут быть отражены в бухгалтерской отчетности, но должны быть включены в экономические издержки;

во-вторых, в отличие от бухгалтерских, экономические издержки включают не только явные, но и неявные издержки, т.е. платежи, условно начисляемые за все ресурсы, которые принадлежат собственникам фирмы. Если, например, фирма использует свой собственный капитал (физический и денежный), то она никому не платит ни арендной платы, ни процентных выплат. Однако условно начисляемые арендная плата (физический капитал) и проценты (денежный капитал) включаются в экономические издержки;

в-третьих, в бухгалтерские издержки затраты на ресурсы входят по фактической стоимости приобретения. В экономические издержки все выплаты и начисления (явные и неявные) входят по альтернативной стоимости или, иными словами, по стоимости лучшей альтернативы. Например, арендная плата, условно начисляемая на собственное оборудование, включается в издержки по той максимальной ставке, по которой фирма могла бы сдать это оборудование в аренду кому-либо еще, т.е. по рыночной ставке.

Для многих видов ресурсов стоимость приобретения и альтернативная стоимость могут совпадать. Возьмем, например, оплату труда. Фирма не станет платить за труд больше, чем работник может получить в других, "альтернативных", фирмах. В то же время, если бы заработная плата была ниже альтернативной стоимости труда, фирма лишилась бы своих работников. Однако во многих случаях возможны несовпадения. Если фирма, например, закупила впрок большую партию сырья, и после этого цены на него возросли, то в экономические издержки сырье должно войти по текущей рыночной стоимости, а не по стоимости приобретения. По сути дела, экономические издержки представляют собой альтернативную стоимость всех используемых ресурсов. Их можно определить как минимальные выплаты, которые требуются, чтобы удержать необходимые ресурсы в данном процессе производства, избегнув их альтернативного использования.

Разница между выручкой от реализации продукции и бухгалтерскими издержками составляет бухгалтерскую прибыль. Разница между выручкой и экономическими издержками – экономическую прибыль. Бухгалтерская отчетность по издержкам и прибыли важна для налоговых и статистических органов, а также для оценки величины экономических издержек. Для принятия решений в области цен, объемов выпуска, продолжения или прекращения выпуска данного товара более важную роль играет анализ экономических издержек.

Если выручка не покрывает экономических издержек, то это означает, что альтернативные способы использования ресурсов более выгодны. Как правило, фирмы заинтересованы в превышении выручки над экономическими издержками. Но даже если выручка и издержки равны (случай нулевой экономической прибыли), то это означает, что данный бизнес обеспечивает доходы всем владельцам факторов производства на уровне, который не ниже, чем при альтернативных видах деятельности, и, следовательно, может нормально осуществляться.

В дальнейшем под издержками понимаются именно экономические издержки. Анализируя их, мы будем исходить из естественной предпосылки о том, что каждая фирма всегда стремится минимизировать издержки на производство определенного объема продукции. Будем предполагать, что фирмы являются совершенными конкурентами на рынке ресурсов. Изменение объема приобретаемых каждой фирмой ресурсов не оказывает влияния на их рыночную цену.

3.2. Принцип минимизации издержек

Снова сведем все многообразие ресурсов к двум факторам: труду (L) и капиталу (K), которые будем измерять в часах использования. Пусть r – арендная плата (реально выплачиваемая, условно начисляемая) за час работы капитала (физического), w – часовая ставка оплаты труда. Тогда общие издержки выпуска (TC) могут быть определены как

$$TC = rK + wL. \tag{3.1}$$

Представим это уравнение в виде

$$K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r}L. \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) в явной форме свидетельствует о том, что взаимосвязь между количеством используемых ресурсов и издержками характеризуется линейной зависимостью и в системе координат $K - L$ может быть представлена как семейство параллельных прямых с отрицательным наклоном (рис. 3.1).

Эти линии называются изокостами, так как точки, лежащие на каждой такой линии, характеризуют все способы производства (сочетания факторов *K* и *L*), которым соответствует одинаковая величина издержек (*TC*). Чем дальше лежит изокоста от начала координат, тем большие количества факторов входят в расположенные на ней способы производства и тем выше связанный с ними уровень издержек $(TC_4 > TC_3 > TC_2 > TC_1)$.

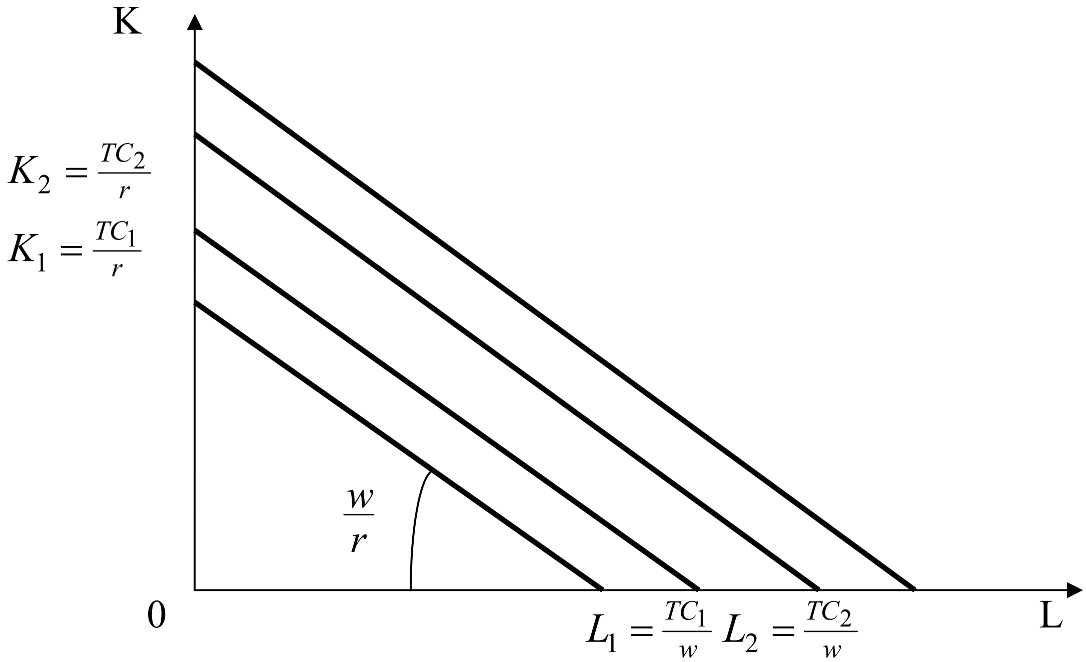


Рис. 3.1. Карта изокост

Абсолютная величина наклона изокост $\left(\frac{\Delta K}{\Delta L}\right)$ характеризуется соотношением $\frac{w}{r}$. При снижении цены труда изокосты становятся более пологими, при ее повышении – более крутыми (рис. 3.2). Снижение цены капитала, наоборот, делает изокосты более крутыми, а повышение – более пологими (рис. 3.3). Если цены ресурсов изменяются в одном направлении и в одинаковой пропорции, то происходит параллельный сдвиг изокост вправо (повышение цен) или влево (снижение цен) относительно начала координат.

Предположим, что фирма принимает решение производить продукцию в объеме Y_1. Какой способ производства ей следует выбрать, чтобы минимизировать издержки? Геометрическая иллюстрация выбора представлена на рис. 3.4а. Объем производства Y_1 может быть обеспечен при различных комбинациях ресурсов, но оптимальную комбинацию представляет способ производства *C*, расположенный в точке касания изокванты с одной изокост. Именно при такой комбинации ресурсов обеспечивается минимум издержек на выпуск Y_1. Поскольку в точке касания наклоны изокост и изокванты равны, можно формализовать принцип поведения фирмы, минимизирующей издержки. Для того чтобы минимизировать издержки данного объема продукции, фирма должна выбрать такое сочетание производственных факторов, при котором

$$MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$$

или

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}. \tag{3.3}$$

Иными словами, норма замещения ресурсов в производстве должна быть равна отношению, в котором эти ресурсы могут быть замещены друг другом на рынке.

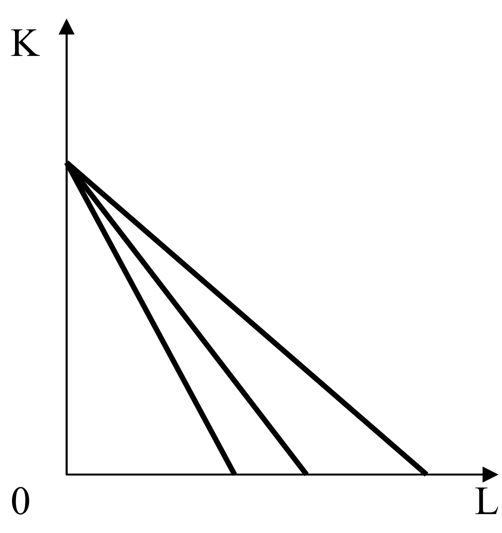


Рис. 3.2. Изменение наклона изокост при изменении цены труда

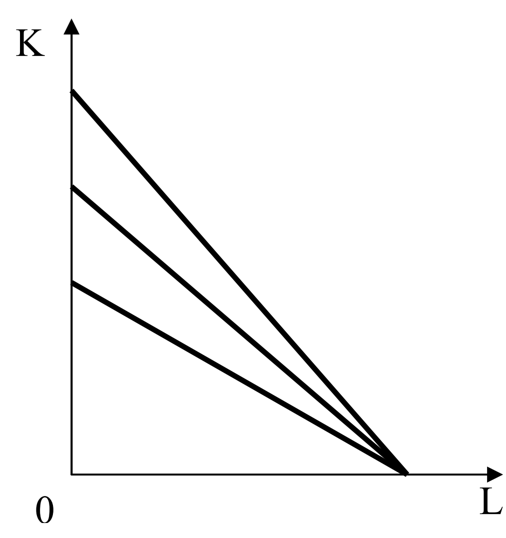


Рис. 3.3. Изменение наклона изокост при изменении цены капитала

Рассмотрим экономический смысл принципа минимизации издержек. Представим уравнение (3.3) в другом виде:

$$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}. \qquad (3.4.)$$

Это означает, что единица денежных средств, затраченных на приобретение каждого фактора производства, должна приносить одинаковый предельный продукт.

Предположим, что это правило не выполняется, тогда, сохраняя неизменной общую величину издержек, можно изменить их структуру, то есть сократить количество фактора, который приносит меньший предельный продукт на единицу затрачиваемых средств, и увеличить на высвобожденные деньги количество фактора с более высоким предельным продуктом. Выпуск, таким образом, возрастет при неизменных издержках. Но если при данных издержках достижим больший выпуск, то, следовательно, прежний выпуск может быть достижим при меньших издержках. Таким образом, доказано, что все способы производства, при которых не соблюдается равенство (3.4), не дают минимума издержек при данном объеме выпуска.

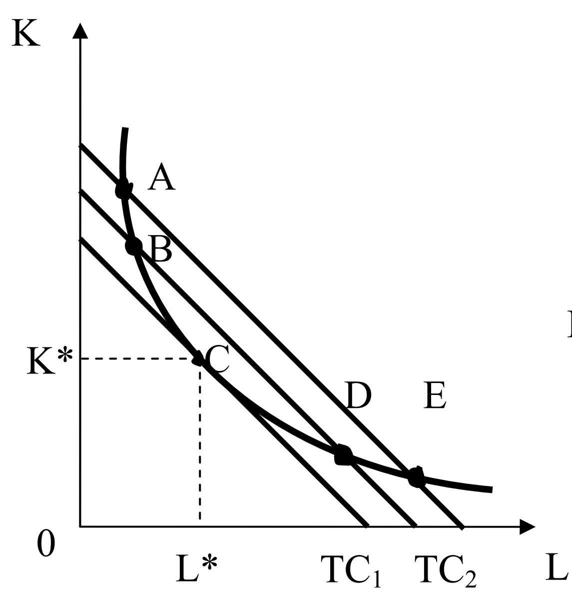


Рис. 3.4а. Минимизация издержек при данном выпуске

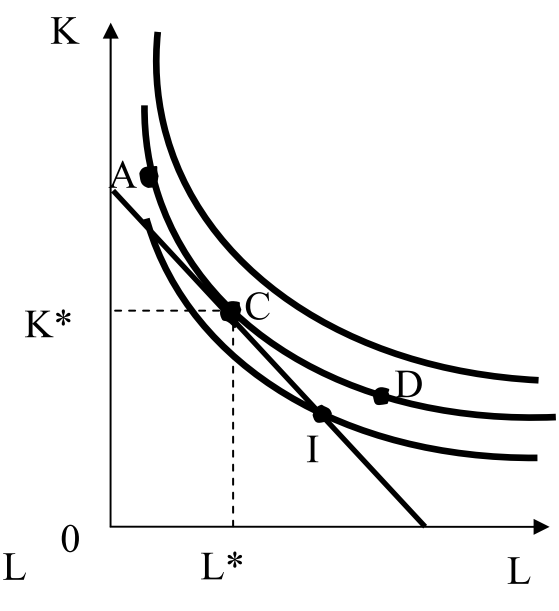


Рис. 3.4б. Двойственная задача максимизации выпуска

Заметим, что все способы производства, расположенные на одной изокванте на рис. 3.4а, являются технически эффективными, но экономически эффективным является только один, при котором обеспечивается минимум издержек, – способ в точке C.

Формализованная задача минимизации издержек будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &TC = rK + wL \to \min \\ &f(K,L) = Y \\ &K > 0, L > 0 \end{aligned} \quad . \tag{3.5}$$

При заданном объеме производства и заданной производственной функции попробуем найти оптимальные затраты объема капитала и трудовых ресурсов, обеспечивающих минимальные издержки. Так как производственная функция является нелинейной (в общем случае), то для решения применим функцию Лагранжа.

$$Lag(K,L,\lambda) = rK + wL + \lambda(Y - f(K,L)).$$

Условия теоремы Лагранжа (равенство нулю первых частных производных) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Lag}{\partial K} = w - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial K} = 0 \\ \dfrac{\partial Lag}{\partial L} = r - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial Lag}{\partial \lambda} = Y - f(K,L) = 0 \end{cases} \quad . \tag{3.6}$$

Из первого и второго уравнений системы выразим $\dfrac{1}{\lambda}$ и приравняем:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial f / \partial K}{r} = \frac{\partial f / \partial L}{w} = \frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}. \tag{3.7}$$

Данное уравнение раскрывает экономический смысл множителя Лагранжа λ. Он показывает, на какую величину изменятся издержки, если выпуск изменится на малую величину, то есть характеризует величину предельных издержек.

Преобразуем выражение (3.7) (выразим отношение $\dfrac{w}{r}$):

$$\frac{w}{r} = \frac{\partial f}{\partial L} : \frac{\partial f}{\partial K} = \frac{MP_L}{MP_K} = MRTS_{LK}.$$

Если данный выпуск Y^* обеспечивается при минимальных издержках TC^*, то это означает в то же время, что Y^* представляет собой максимальный выпуск, который достижим при данных издержках.

Сформулируем двойственную задачу по отношению к задаче минимизации издержек, а именно максимизацию выпуска при заданных издержках:

$$\begin{aligned} &Y = f(K, L) \to \max \\ &TC = rK + wL \qquad . \\ &K > 0, L > 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Задача (3.8.) является двойственной к задаче (3.5). Алгебраически решение задачи (3.8) дает тот же результат, что и решение задачи на минимизацию издержек. Его геометрическая интерпретация представлена на рис. 3.4б.

Решая задачу минимизации издержек при данном выпуске, фирма как бы двигается по изокванте, перебирая технически эффективные способы производства, и останавливается на том, который лежит на самой низкой изокосте – в точке касания *C*.

Решая задачу максимизации выпуска при данных издержках TC_1, фирма как бы перебирает способы производства, лежащие на изокосте и выбирает тот, который достигает самой высокой изокванты – точки *C*.

Сочетания ресурсов, характеризующие экономически эффективные способы производства, формируют так называемый условный, или производный, спрос на ресурсы. Это спрос на ресурсы в количестве, необходимом для определенного объема выпуска с минимальными издержками. Траектория расширения производства характеризует условный спрос на ресурсы при всех возможных значениях выпуска.

Насколько интенсивными будут изменения условного спроса на ресурсы при изменениях цен ресурсов, зависит от эластичности замещения.

Так как в точке оптимума (минимум издержек) $MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$, коэффициент эластичности замещения можно представить в виде

$$\delta = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} : \frac{\Delta\left(\frac{w}{r}\right)}{\frac{w}{r}} \Big| Y_{const.} \tag{3.9}$$

Этот коэффициент показывает, на сколько процентов изменится капиталовооруженность труда (отношение $\frac{K}{L}$) в экономически эффективном способе производства при изменении отношения цен на ресурсы $\left(\frac{w}{r}\right)$ на один процент.

Если рассматривать производство не как упрощенную двухфакторную модель, а во всем многообразии используемых ресурсов, то концепцию эластичности замещения можно применять для любой пары используемых ресурсов. В двухфакторной модели коэффициент эластичности замещения всегда больше или равен (для производственной функции Леонтьева) нулю. В многофакторной модели коэффициенты эластичности замещения для различных пар ресурсов могут иметь не только положительное, но и отрицательное значение.

3.3. Издержки в длительном периоде

Динамика издержек в длительном и коротком периодах неодинакова. Долгосрочный период – отрезок времени, достаточный для того, чтобы фирма могла изменить количество всех используемых ресурсов. Краткосрочный период – отрезок времени, в котором хотя бы один из используемых ресурсов является фиксированным, и его количество не может быть изменено. Рассмотрим издержки долгосрочного периода.

Траектории расширения производства, пересекая карту изокост, характеризуют минимум издержек, необходимых для производства различных объемов выпуска при данных ценах на ресурсы. Зависимость таких минимально необходимых уровней издержек от цен ресурсов и объема выпуска может быть представлена функцией общих издержек:

$$LTC = LTC\ (r, w, Y). \tag{3.10}$$

Основные характеристики издержек:

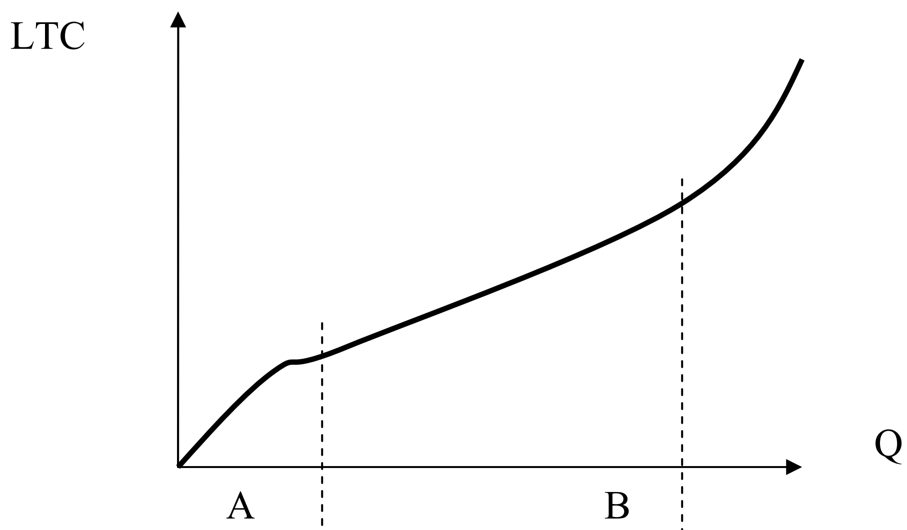
- *средние издержки*, издержки на единицу продукции (*LAC*)

$$LAC = LAC(r, w, Y) = \frac{LTC(r, w, Y)}{Y}; \tag{3.11}$$

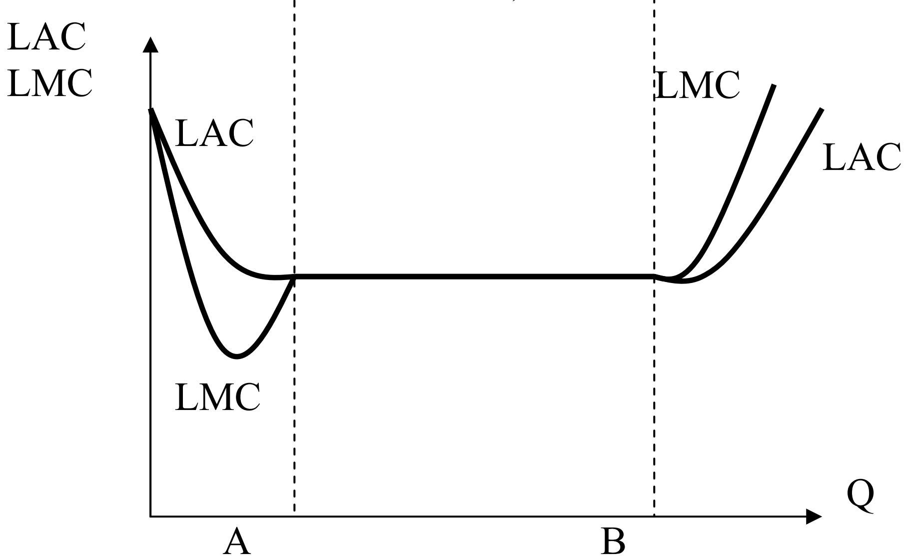
- *предельные издержки (LMC)* (характеризуют изменение величины общих издержек при изменении выпуска на одну единицу):

$$LMC = LMC(w, r, Y) = \frac{\partial LTC(r, w, Y)}{\partial Y}. \tag{3.12}$$

Предельные издержки могут быть интерпретированы как численное значение тангенса угла наклона функции общих издержек. Снижение наклона кривой *LTC* на стадии возрастающей отдачи от масштаба производства свидетельствует о снижении *LMC*. Соответственно на стадии постоянной отдачи от *LMC* неизменны и на стадии убывающей отдачи от масштаба предельные издержки растут (рис. 3.5.б).



а)



б)

Рис.3.5. Кривые общих (а), средних и предельных (б) издержек

При данных ценах на ресурсы функции издержек можно представить посредством кривых издержек (рис. 3.5а,б). Форма этих кривых зависит от характера отдачи от масштаба производства. Предположим, что фирма увеличивает выпуск сначала при возрастающей отдаче от масштаба (отрезок *OA* на рис. 3.5а,б), а затем при неизменной (*AB*) и при убывающей отдаче (отрезок правее, точка *B*). Тогда кривая общих издержек (*LTC*) на участке *OA* будет иметь убывающий наклон, так как выпуск возрастает в большей степени, чем количество вовлекаемых ресурсов и, следовательно, издержки.

На отрезке *AB* динамика общих издержек представлена прямой линией. Она характеризует прямо пропорциональную зависимость между выпуском и издержками в условиях неизменной отдачи от масштаба. На отрезке правее *B* кривая имеет возрастающий наклон, так как количество вовлекаемых ресурсов, а значит, и издержки увеличиваются более высокими темпами, чем выпуск.

Средние издержки на участке *OA* понижаются, так как при возрастающей отдаче от масштаба общее издержки (числитель выражения (3.11) растут более низкими темпами, чем выпуск (знаменатель). Аналогично установим, что при неизменной отдаче от масштаба средние издержки не изменяются с ростом выпуска (кривая *LAC* горизонтальна) При убывающей отдаче от масштаба средние издержки растут.

Вызывает интерес взаимосвязь кривых *LMC* и *LAC*. Общие издержки могут быть определены как сумма предельных издержек на каждую единицу продукции. Из формулы (3.12) вытекает, что

$$LTC = \int_0^Y LMC\, dY .$$

Поэтому средние издержки можно представить как

$$LAC = \frac{\sum_{i=1}^{Y} LMC}{Y} . \qquad (3.13)$$

Отсюда следует, что для первой единицы продукции *LAC* и *LMC* совпадают, следовательно, кривые издержек исходят из одной точки. Поскольку при снижении *LMC* предельные издержки на предыдущие единицы продукции выше, чем на последнюю единицу, средние издержки будут всегда выше предельных. Пока предельные издержки остаются ниже средних издержек, последние будут понижаться с ростом выпуска (отрезок *OA*). Аналогично: когда предельные издержки становятся выше средних и возрастают (отрезок правее *B* – убывающая отдача от масштаба), средние издержки всегда ниже предельных. При неизменных предельных издержках (постоянная отдача от масштаба) $LMC = LAC$. Поэтому на участке *AB* соответствующие кривые сливаются в одну линию.

Утверждение. Предельные и средние издержки совпадают при минимальном значении средних издержек и остаются неизменными при постоянной отдаче от масштаба производства.

Доказательство. Известно, что минимум у функции достигается в точке, где первая производная равна нулю. Следовательно:

$$\frac{\partial LAC}{\partial Y} = \frac{\partial\left(\frac{LTC}{Y}\right)}{\partial Y} = \frac{Y\frac{\partial LTC}{\partial Y} - LTC \cdot 1}{Y^2} = \frac{Y \cdot LMC - LTC}{Y^2} = 0\,.$$

Числитель дроби должен быть равен нулю:

$$Y \cdot LMC - LTC = 0$$

или

$$LMC = \frac{LTC}{Y} = LAC\,.\bullet$$

Наименьший объем выпуска, при котором достигается минимум средних издержек, определяется обычно как минимально эффективный размер производства.

3.4. Издержки в краткосрочном периоде

В коротком периоде, по определению, фирма не может изменить количество некоторых ресурсов. В связи с этим применительно к короткому периоду выделяют постоянные факторы производства, объем которых не может быть изменен. Соответственно издержки на постоянные факторы относят к постоянным издержкам (*FC*), а издержки на переменные факторы – к переменным издержкам (*VC*). Сумма постоянных и переменных издержек образует общие издержки в коротком периоде (*STC*):

$$STC = FC + VC\,. \tag{3.14}$$

На практике к постоянным издержкам относят обычно издержки по содержанию зданий и сооружений, производственного оборудования, заработную плату административно-управленческого персонала и другие платежи, величина которых не зависит от объема выпуска. Растет ли выпуск или сокращается вплоть до нулевого уровня – постоянные издержки остаются неизменными.

Величина переменных издержек зависит от объема выпуска. Чем больше объем производства, тем выше переменные издержки. На практике к ним относят, в частности, затраты на сырье, материалы, электроэнергию для технологических нужд, заработную плату рабочих и т.п.

В составе постоянных издержек выделяют собственно постоянные и квазипостоянные издержки. Первые остаются неизменными при любом, в том числе нулевом, объеме выпуска. Вторые при нулевом объеме отсутствуют. Они возникают только при положительном выпуске, но при любых размерах производства их величина также остается неизменной. К квазипостоянным издержкам относятся, например, затраты на ежедневную уборку производственных цехов.

Деление на постоянные и переменные издержки имеет смысл только для краткосрочного периода. В долгосрочном периоде фирма может изменять в необходимой степени количество всех факторов. В этом смысле все издержки длительного периода являются переменными.

Предположим, что в нашей двухфакторной модели производства капитал является постоянным фактором, а труд – переменным. Тогда производственная функция (для краткосрочного периода) примет вид:

$$Y = f(\overline{K}, L), \tag{3.15}$$

где $\overline{K}$ – константа.

Общие издержки могут быть определены как

$$STC = r\widetilde{K} + wL, \tag{3.16}$$

где $r\widetilde{K} = FC$ и $wL = VC$.

Решив уравнение (3.16) на нахождение минимума при ограничении (3.15), получим выражение для функции общих издержек в коротком периоде:

$$STC = STC(r, w, L, \widetilde{K})$$

или

$$STC = STC(r, w, Y). \tag{3.17}$$

Эта функция характеризует минимальные значения общих издержек, которые необходимы для создания различных объемов выпуска в коротком периоде при разных ценах на ресурсы.

Аналогичным образом переменные издержки можно представить в виде функции:

$$VC = VC\left(r, w, L, \widetilde{K}\right)$$

или

$$VC = VC\left(r, w, Y\right), \tag{3.18}$$

а постоянные издержки – в виде

$$FC = FC\left(r, \widetilde{K}\right). \tag{3.19}$$

Если предположить, что цены на факторы производства неизменны, то функции (3.17) – (3.19) можно представить в виде кривых постоянных, переменных и общих издержек (рис. 3.6).

Поскольку постоянные издержки не зависят от объема выпуска, кривая *FC* выглядит как горизонтальная линия. Кривая переменных издержек имеет положительный наклон, что отражает прямую зависимость *VC* от объема производства. Если размеры капитала фиксированы, то при малом количестве труда он используется не полностью. Поэтому подключение новых работников сопровождается ростом предельной производительности труда.

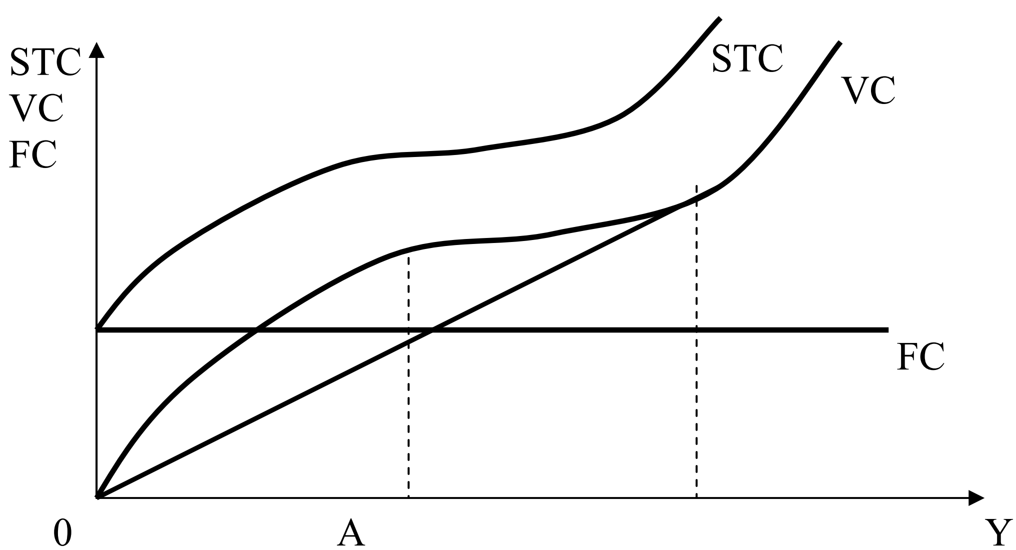


Рис. 3.6. Кривые постоянных, переменных и общих издержек в коротком периоде

Отношение $\frac{\Delta Y}{\Delta L}$ растет, и, следовательно, переменные издержки возрастают медленнее, чем выпуск (Y). Это иллюстрируется снижением наклона кривой VC на отрезке OA. По достижении определенного объема выпуска производственные мощности загружаются полностью, и дальнейшее увеличение переменного фактора сопровождается снижением его предельной производительности.

Это ведет к тому, что переменные издержки возрастают быстрее, чем выпуск. Поэтому на отрезке правее A наклон кривой VC повышается. Поскольку $STC = FC + VC$, кривая общих издержек может быть воспроизведена просто сдвигом кривой переменных издержек вверх на величину постоянных издержек. Чем выше постоянные издержки, тем выше будет располагаться кривая STC.

В краткосрочном периоде, так же как и в долгосрочном, выделяют функции издержек на единицу выпуска. Это – функции:

- средних постоянных издержек:

$$AFC = \frac{FC\left(r, \widetilde{K}\right)}{Y};$$

- средних переменных издержек:

$$AVC = \frac{VC(r, w, Y)}{Y};$$

- средних общих издержек:

$$SATC = \frac{STC(r, w, Y)}{Y};$$

- предельных издержек:

$$SMC = \frac{\partial STC(r, w, Y)}{\partial Y}.$$

Поскольку $STC = FC + VC$, где FC – константа, краткосрочные предельные издержки можно представить в виде

$$SMC = \frac{\partial(FC + VC)}{\partial Y} = \frac{\partial VC}{\partial Y}.$$

Принимая цены факторов неизменными, мы можем построить кривые издержек, соответствующие этим функциям (рис. 3.7). Поскольку постоянные издержки не изменяются с объемом выпуска, при его увеличении средние постоянные издержки $\left(\frac{FC}{Y}\right)$ непрерывно снижаются. На стадии повышения предельной производительности труда (отрезок *OA)* предельный продукт труда $\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)$ растет и, следовательно, $\frac{w\Delta L}{\Delta Y}=\frac{\Delta VC}{\Delta Y}$, т.е. предельные издержки снижаются. На стадии снижения предельной производительности (отрезок правее *A*) предельные издержки возрастают.

В предыдущем разделе мы анализировали взаимосвязь между динамикой предельных и средних издержек в долгосрочном периоде.

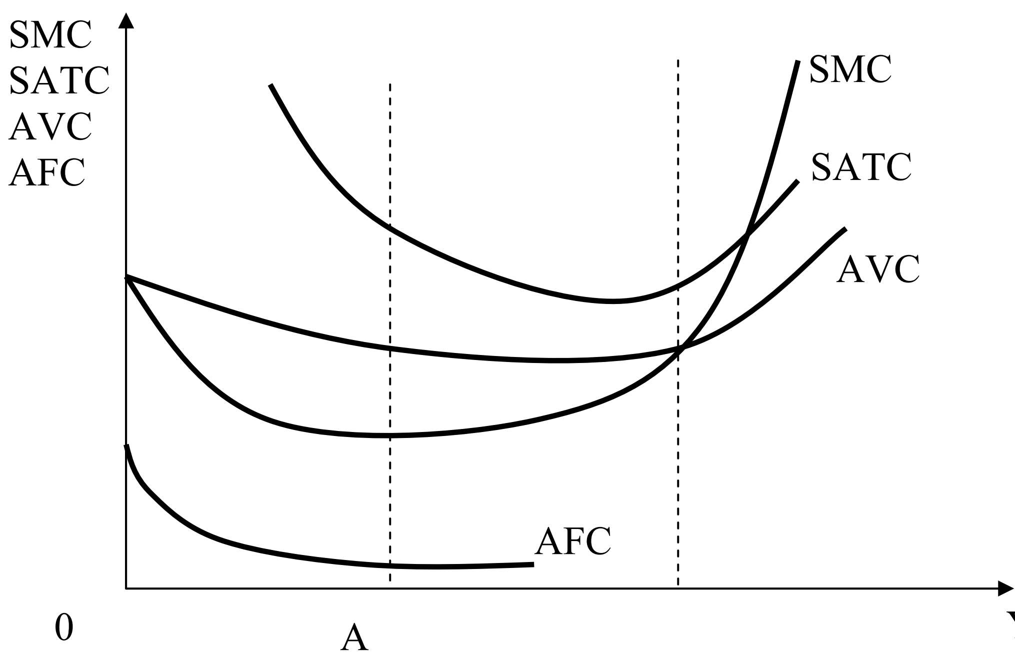


Рис. 3.7. Кривые издержек на единицу выпуска

Поскольку все долгосрочные издержки по природе своей являются переменными издержками, приведенную аргументацию можно использовать для выявления взаимосвязи между краткосрочными предельными издержками и средними переменными издержками. В результате мы придем к следующим выводам. Кривые предельных и средних издержек берут начало в одной точке. Пока предельные издержки ниже средних переменных, последние убывают (кривая *AVC* понижается). Когда предельные издержки (т.е. переменные на добавочную единицу продукции) начинают возрастать, но все еще остаются ниже средних переменных издержек, последние еще продолжают снижаться. И, только когда возрастающие добавочные (предельные) издержки становятся выше средних (*AVC*), последние начинают возрастать. А в точке пересечения кривых средних переменных и предельных издержек, когда $AVC = SMC$, достигается минимум средних переменных издержек.

Средние общие издержки представляют собой сумму средних постоянных и средних переменных издержек ($SATC = AFC + AVC$), поэтому кривая ATC формируется путем сложения по вертикали кривых AFC и AVC. Так как

$$SMC = \frac{\partial VC}{\partial Y} = \frac{\partial STC}{\partial Y},$$

легко показать также, что, когда SMC ниже $SATC$, последние снижаются, а когда SMC становятся выше $SATC$, последние начинают расти, и пересечение кривых SMC и $SATC$ происходит в точке минимума функции средних общих издержек.

Задачи для самостоятельного решения

1. Технология разгрузки вагонов описана производственной функцией $Y = 10K^{1/2}L^{1/2}$.

Недельная заработная плата работника составляет 1 тыс.руб., недельная аренда одной единицы оборудования – 4 тыс. руб.

Задание A. Какое количество работников следует нанять и какое количество оборудования необходимо арендовать, чтобы разгрузить 160 вагонов за неделю?

Задание B. Известно, что издержки фирмы по разгрузке вагонов составляют за неделю 320 тыс. руб. Определите, какое количество вагонов было разгружено фирмой, минимизирующей издержки.

Задание C. Предположим, что аренда оборудования стала вдвое дешевле. Сколько работников и оборудования должна использовать теперь фирма, чтобы разгрузить 160 вагонов в неделю?

Задание D. Определите долгосрочные общие средние и предельные издержки как функции от цен ресурсов и выпуска.

2. Исходя из условий задачи 1, предположим, что на станцию прибыло 160 вагонов, которые необходимо разгрузить в течение недели. Однако лизинговая компания может сдать в аренду не более 4 единиц оборудования.

Задание A. На какую величину краткосрочные издержки на 1 вагон превысят долгосрочные издержки?

Задание B. Определите краткосрочные общие, средние, средние переменные и предельные издержки как функцию от количества разгружаемых вагонов при аренде 4 единиц оборудования.

Задание C. Определите величину средних переменных издержек.

Задание D. Если компания арендует 4 единицы оборудования, то при каком количестве разгружаемых вагонов *SATC* окажутся самыми низкими и чему будет равна их величина?

Задание E. Дайте графический комментарий к решению задачи.

3. Выпуск товара "Валенки" сосредоточен на двух фабриках. Для каждого из них производственная функция равна: $Y = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$. Арендная плата за единицу капитала и цена единицы труда одинаковы $(r = w = 1)$. На первой фабрике имеется 100 единиц капитала, на второй – 36. Труд является переменным фактором.

Задание A. Какой должна быть доля второй фабрики в общем выпуске товара в коротком и длительном промежутках?

Задание B. Первая фабрика выпускает 100 единиц продукции. Определите средние общие, средние переменные и предельные издержки первой и второй фабрики в коротком и длительном периодах, если выпуск распределен между ними оптимально.

Задание C. Определите средние общие, средние переменные и предельные издержки первой и второй фабрики в коротком и длительном периодах, если выпуск составляет 200 единиц продукции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие "Экономико-математическое моделирование: математическое моделирование микроэкономических процессов и систем" призвано помочь студенту освоить курс микроэкономики с позиции математического моделирования.

После изучения данного курса студент должен уметь моделировать сферу потребления, применять функцию полезности, рассчитывать функцию спроса, владеть понятием эластичности, применять уравнение Слуцкого, лемму Шеппарда, тождество Роя.

В сфере теории производства изучению производственной функции отводится основная роль. Изучение данного раздела позволит оптимизировать процессы производства фирмы, предприятия; рассчитать основные производственные характеристики. В результате можно получить ответ на вопрос: какую величину выпуска необходимо производить при различных технически эффективных способах производства?

Ответ на вопрос о характере, величине издержек при данном выпуске содержится в третьем разделе – теории издержек.

Список литературы

Аллен Р. Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963.

Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика: В 3-х т. / Под. общ. ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2007.

Гринева Н.В. Методическое пособие по дисциплине "Математическое моделирование микроэкономических процессов": Учебное издание для студентов Института ММЭиАУ. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2006.

Замков А.Н. Математические методы в экономике. М., 1999.

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997.

Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979.

Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002.

Клейнер Г.Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986.

Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ДИС, 1998.

Котов И.В. Моделирование народно-хозяйственных процессов. Л.: ЛГУ, 1990.

Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. М.: ABF, 1999.

Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984.

Математическое моделирование экономических процессов / Под ред. Белоусова Е.Г., Черемных Ю.Н., Керта Х., Отто К. М.: МГУ, 1995.

Моисеев Н.Н. Математика – управление – экономика. М.: Знание, 1970.

Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. Производственные функции в экономическом анализе. Вильнюс: Минтис, 1984.

Терехов Л.Л. Производственные функции. М.: Статистика, 1974.

Чеканский А.Н., Фролова Н.Л. Микроэкономика. Промежуточный уровень: Учебник. М.: ИНФРА-М, 2008.

Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

Экономико-математическое моделирование: Учебник для студентов вузов / Под ред. Дрогобыцкого И.Н. М.: Экзамен, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Наталья Владимировна Гринева

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕСОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор и корректор *Т.А. Наумова*
Художественный редактор *В.А. Селин*
Техническое редактирование и
компьютерная верстка *Л.Б. Галкиной*

Подписано в печать 23.09.2008.
Формат 60×90/16. Гарнитура Times.
Уч.-изд.л. 5,26. Усл. п.л. 6,50.

Тираж 500 экз.

Финакадемия
125993 (ГСП-3), Москва, Ленинградский просп. 49

Отпечатано в ПМБ Финакадемии