В.А. Колемаев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

моделирование макроэкономических процессов и систем

учебник

ЮНИТИ
UNITY

В.А. Колемаев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области математических методов в экономике в качестве ***учебника*** *для студентов вузов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике»*

Рекомендовано Учебно-методическим центром «Профессиональный учебник» в качестве ***учебника*** *для студентов вузов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике»*

ЮНИТИ
UNITY

Москва • 2005

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631.0я73-1
К60

Рецензенты:
кафедра математических методов анализа экономики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
(доктор экономических наук, профессор *Ю.Н. Черемных*);
доктор экономических наук, профессор *В.С. Мхитарян*
(зав. кафедрой статистики и эконометрики МЭСИ)

Учебник подготовлен при содействии Национального фонда подготовки кадров в рамках программ «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» Инновационного проекта развития образования

Главный редактор издательства кандидат юридических наук,
доктор экономических наук *Н.Д. Эриашвили*

Колемаев, Владимир Алексеевич.

К60 Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике» / В.А. Колемаев. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — 295 с.

ISBN 5-238-00969-0
Агентство CIP РГБ

Представлены основные сведения о математических методах и моделях исследования макроэкономических процессов и систем, показаны возможности этих методов для оценки последствий принимаемых макроэкономических решений.

Учебник состоит из разделов: «Методы и модели исследования макроэкономических процессов и систем», «Моделирование развития национальной экономики», «Моделирование взаимодействия с мировой экономикой». Приведены вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, а также научных работников.

ББК 65в631.0я73-1

ISBN 5-238-00969-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник предназначен для студентов, изучающих одноименную дисциплину в соответствии с учебным планом специальности 061800 «Математические методы в экономике», а также для магистров и аспирантов специальности 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики».

Цель учебника — дать студентам основные сведения о математических методах и моделях исследования макроэкономических процессов и систем, а также показать, как можно, не прибегая к дорогостоящим (в прямом и переносном смысле) экономическим экспериментам, оценивать на качественном уровне с помощью этих методов различные варианты макроэкономической политики, предвидеть в общих чертах последствия принимаемых решений или изменений в конъюнктуре рынка.

Предполагается, что студенты владеют основами экономической науки, имеют фундаментальную и прикладную математическую подготовку (в том числе владеют методами дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, линейного и нелинейного программирования), а также имеют начальные навыки математического моделирования экономических явлений и процессов.

Учебная программа и учебник по данной дисциплине не претендуют на охват всех математических методов и моделей исследования макроэкономических процессов и систем, поскольку многие из них используются в других дисциплинах специальности. Основной принцип отбора методов и моделей в этом учебнике — *непрерывное время* и *нелинейность*.

В последние десятилетия в исследованиях динамики экономических систем наблюдается устойчивая тенденция перехода к непрерывному времени. Непрерывное время позволяет адаптировать методы и модели, опыт исследования линейных и нелинейных динамических систем, накопленный в технических науках (и прежде всего в теории автоматического регулирования).

Большинство зависимостей в экономике имеет нелинейный характер (например, зависимость выпуска продукции от затрат ресурсов), однако в многоразмерных динамических моделях экономики (динамическая модель Леонтьева, модели Неймана и Гейла) эти зависимости линеаризуются. Поэтому представляется целесообразным учитывать нелинейность при изучении макроэкономических процессов. В предлагаемом учебнике нелинейность отражается с помощью нелинейных производственных функций секторов, которые (функции) задают технологический уклад.

Трудности в аналитическом исследовании динамики нелинейных малосекторных моделей растут в геометрической прогрессии с увеличением числа секторов. Принципиальным, по мнению автора, является использование трехсекторной модели для описания поведения экономики на макроуровне. Дальнейшее увеличение числа секторов мало что дает, зато сопряжено с труднопреодолимыми аналитическими сложностями.

Книга содержит новые результаты автора, полученные по трехсекторной модели экономики и опубликованные порознь в отечественных учебниках [5, 6] и научных журналах («Вестник университета», «Известия Международной академии наук Высшей школы», «Труды Международной академии информатизации»).

Учебник состоит из трех разделов. В *первом разделе* (гл. 1) представлены сведения о математических методах исследования макроэкономических переходных процессов, необходимые для анализа и прогнозирования поведения экономики на макроуровне. Эти методы применяются для анализа моделей Солоу, Самуэльсона—Хикса и динамических моделей Кейнса и Леонтьева.

Во *втором разделе* (гл. 2—5) исследуется модель замкнутой трехсекторной экономики как макромодель экономического роста. Результаты исследования используются для:

- выявления условий, обеспечивающих сбалансированный экономический рост;
- нахождения наиболее рациональных вариантов структурной политики;
- установления механизма возникновения и самоподдержания инфляции;
- определения направлений рационального перераспределения налогов между секторами.

Третий раздел (гл. 6, 7) посвящен моделированию взаимодействия национальной экономики с мировой. Показано использование моделей внешней торговли для оценки различных вариантов внешнеторговой политики, исследуется процесс перехода к новому, более эффективному технологическому укладу.

Каждая глава снабжена примерами, вопросами и заданиями, предназначенными для активного освоения материала.

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени в экономической теории сложилось два основных направления: традиционное (равновесное) и эволюционное. Первое восходит к лозаннской школе и заключается в том, что переходные процессы в экономике заканчиваются установлением устойчивого равновесия, т.е. паузой между переходными процессами служит устойчивое равновесие. Напротив, сторонники второго направления считают, что экономика перманентно находится в состоянии неравновесия, т.е. паузой служит очередной переходный процесс.

Как представляется, кардинального противоречия между этими направлениями нет. Ведь в экономике одновременно протекают несколько разноплановых переходных процессов. Некоторые из них — «быстрые», другие — «медленные». Если нас интересуют «быстрые» процессы, то «медленными» можно пренебречь. Если же для нас важны «медленные» процессы, то «быстрые» процессы можно элиминировать с помощью процедуры осреднения.

К «медленным» можно отнести процессы, обусловленные научно-техническим прогрессом и проявляющиеся в новых продуктах и услугах, росте ресурсоотдачи и сокращении ресурсоемкости. Вместе с тем процесс перевооружения временами может носить революционный характер, когда новые высокие технологии повсюду заменяют старые, как это имеет место сейчас, в эпоху повсеместного внедрения информационных технологий. «Медленные» и «быстрые» процессы перевооружения, по-видимому, являются предметом изучения эволюционного направления.

«Быстрыми» можно считать процессы, вызванные изменением конъюнктуры рынка, управляющими решениями (например, изменением политики) и т.п. В таких ситуациях экономика по завершении переходного процесса либо возвращается в первоначальное состояние, либо оказывается в новом состоянии. Изучение таких процессов можно отнести к прерогативе традиционного направления.

Так что такое макроэкономические процессы и какие из них будут исследованы ниже?

Экономический процесс — это изменение состояния экономической системы во времени или в зависимости от какого-либо другого параметра (параметров).

На макроуровне состояние неструктурированной экономики характеризуется результирующим показателем Y (валовой внутренний продукт) и затратными показателями K, L (капитал, число занятых). Если экономика структурирована в три производственных сектора, то результирующих показателей — три (X_0 — производство предметов труда (материалов); X_1 — производство средств труда (инвестиционных товаров); X_2 — производство предметов потребления), а затратных показателей — шесть (K_i, L_i — основные производственные фонды и число занятых в i-м секторе, $i = 0, 1, 2$).

Далее будут рассмотрены два вида макроэкономических процессов:

1) *переходные* процессы, обусловленные динамическим характером экономической системы;

2) *параметрические* процессы, вызванные изменением экзогенных (в том числе управляющих) макроэкономических параметров.

Динамический характер экономической системы проявляется в том, что причина (изменение в конъюнктуре рынка, объеме инвестиций, структурной или налоговой политике, технологическом укладе и т.д.) переходит в следствие (новое состояние экономической системы) не мгновенно, а с некоторым запозданием.

Если экзогенные макроэкономические параметры (эластичности ресурсов, ресурсоемкости, доли секторов в распределении ресурсов и т.п.) меняются эволюторно, то переходными процессами можно пренебречь и изучать процессы изменения состояния системы в зависимости от изменения макропараметров. Исследование макроэкономических процессов будет осуществляться с помощью математических методов и моделей, прежде всего с помощью теории динамических систем (главным образом, теории автоматического регулирования), опирающейся на аппарат дифференциальных уравнений и преобразований Лапласа. При исследовании переходных процессов в неструктурированной макроэкономике будут использованы динамическая модель Кейнса и модель Самуэльсона—Хикса. Первая будет трактоваться как инерционное звено (динамический элемент первого порядка), вторая — как динамический элемент второго порядка. Переходные и параметрические макроэкономические процессы в структурированной экономике будут изучаться с помощью трехсекторной модели.

В настоящее время не высказывается принципиальных возражений против использования математических методов в решении конкретных экономических и управленческих задач, в развитии самой экономической науки. Косвенным подтверждением правильности такого направления развития экономической науки служит тот факт, что большинство нобелевских премий в области экономики, полученных в послевоенное время, было присуждено за работы, посвященные применению математики в экономических исследованиях и при решении практических экономических задач.

Преимущество математического моделирования состоит в том, что при правильности заложенных в модель предпосылок полученные по модели выводы являются верными. Если заложенные предпосылки неверны, то сравнение результатов, полученных по модели, с реальной действительностью покажет несостоятельность данных предпосылок. В таком случае математическая модель может явиться средством проверки правильности выдвигаемых научных гипотез или предполагаемых направлений экономического развития.

Если посылки верны, то с помощью математических моделей макроэкономических явлений и процессов можно исследовать долгосрочные последствия принимаемых управляющих решений.

Многие известные многоразмерные макроэкономические модели линейны (например, модели Леонтьева, Неймана). Между тем для экономических явлений и процессов характерна нелинейность. Аналитическое исследование многоразмерных нелинейных моделей очень трудоемко. Можно, конечно, экспериментировать с такими моделями на ЭВМ. Но аналитическое исследование по сравнению с имитацией на ЭВМ имеет главное неоспоримое преимущество: оно дает возможность получить всю картину изучаемого явления при любых значениях параметров, в то время как имитация дает лишь ряд фрагментов общей картины при отдельных значениях параметров.

Поэтому для изучения долговременных тенденций, факторов роста, оценки последствий тех или иных вариантов макроэкономических решений применяются нелинейные малосекторные модели. Структура экономики отражена секторами. Каждый сектор производит один агрегированный продукт. Небольшое число секторов позволяет аналитически представить развитие экономики при нелинейных зависимостях выпусков секторов от ресурсов.

Базовой моделью служит односекторная модель Солоу[1]. В этой модели экономическая система рассматривается как единое неструктурированное целое, производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Модель в самом агрегированном виде отражает процесс воспроизводства и позволяет в общих чертах анализировать соотношение между потреблением и накоплением.

Более детально процесс воспроизводства отражает двухсекторная модель, которая впервые на концептуальном уровне была исследована К. Марксом в «Капитале». Как математическая модель она также довольно подробно исследована[2]. В этой модели два агрегированных продукта (средства производства и предметы потребления) и два подразделения (сектора). Первое подразделение производит средства производства, второе — предметы потребления.

На наш взгляд, более адекватно отражает процесс воспроизводства трехсекторная модель экономики, в которой три агрегированных продукта (предметы труда, средства труда и предметы потребления) и каждый из трех секторов производит свой продукт: материальный (нулевой) — предметы труда, фондосоздающий (первый) — средства труда, потребительский (второй) — предметы потребления.

Разделение первого подразделения на два сектора принципиально оправдано: ведь предметы труда используются в одном производственном цикле, в то время как средства труда — во многих. Кроме того, при исследовании трехсекторной экономики появляется возможность напрямую отразить функционирование сектора, производящего промежуточный продукт. Ведь при измерении результата функционирования экономики в форме ВВП промежуточный продукт «растворился», поскольку его стоимость полностью вошла в стоимость средств труда и предметов потребления. Но без топлива, электроэнергии, сырья и других материалов невозможно функционирование экономики, для их производства необходимо затратить достаточно много ресурсов. Так, число занятых в материальном секторе РФ составляет до трети общего числа занятых в производственной сфере, а основные производственные фонды — свыше половины (данные конца 1980-х гг.).

Проведенный математический анализ трехсекторной экономики показал, что материальный сектор по своему поведению

---

[1] *Solow R.M.* Contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. — 1956. — V. 70. — P. 65—94.

[2] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975. С. 491—511.

сродни потребительскому, хотя, судя по происхождению, материальный сектор должен быть похож на фондосоздающий. Сходство в поведении материального и потребительского секторов и их принципиальное отличие от фондосоздающего сектора состоит в том, что с ростом долей ресурсов, используемых секторами, удельные выпуски этих секторов вначале растут, достигая своих максимумов, после чего падают, в то время как удельный выпуск фондосоздающего сектора монотонно растет.

Приведем предварительный укрупненный перечень отраслей, входящих в каждый из секторов.

Материальный сектор — добывающая промышленность, электроэнергетика, металлургия, промышленная химия и нефтехимия, производство сельхозпродукции и морепродуктов, лесозаготовки, промышленность стройматериалов, стекольная и фарфоро-фаянсовая промышленность для производственных целей, грузовой транспорт, служебная связь, оптовая торговля средствами производства.

Фондосоздающий сектор — металлообработка и машиностроение, промышленное строительство.

Потребительский сектор — переработка сельхозпродукции и морепродуктов (легкая и пищевая промышленность), деревообработка, бытовая химия, стекольная и фарфоро-фаянсовая промышленность для бытовых целей, гражданское строительство, пассажирский транспорт, гражданская связь, торговля предметами потребления, производство вооружений.

В заключение еще несколько слов об эмерджентности, динамике и технологическом укладе.

Эмерджентность — наличие у системы свойств целостности, т.е. таких свойств, которые не присущи составляющим ее элементам.

В трехсекторной модели эмерджентность отражена с помощью балансов расхода ресурсов, тем самым увеличение потока ресурсов в один сектор приводит к сокращению их притока в другие секторы.

Динамика в экономической системе (в любой другой динамической системе) проявляется в том, что причина (решение) переходит в следствие (последствия принятого решения) не мгновенно, а с некоторым запозданием.

Возникает естественное желание заглянуть «за горизонт», т.е. узнать, что будет последствием принятого решения. Если управление — это искусство, то последствия принятого решения пытаются предвидеть интуитивно на основе прошлого опыта.

Если же управление — наука, то выявление последствий решения должно осуществляться с помощью концептуальных или математических моделей, основанных на гипотезах, установленных с помощью прошлого опыта.

В рамках динамических моделей данная проблема может решаться путем «приближения» будущего, т.е. рассмотрения установившегося (равновесного) состояния, в котором окажется экономическая система по завершении переходного процесса. Таким образом, причина и следствие приводятся к одному и тому же (будущему) моменту времени. Именно этот прием будет применяться в учебнике.

Технологический уклад — это то состояние производственного аппарата, организации и управления производством, которые могут быть обеспечены при данном уровне научно-технических достижений и сложившейся системе управления.

Ниже технологический уклад будет представлен нелинейными производственными функциями секторов.

Разумеется, в результате научно-технического прогресса появляются все новые и новые научно-технические достижения, которые постепенно внедряются в производство, в его организацию и управление. Будем исходить из того, что эти процессы протекают медленнее, чем переходные процессы, вызванные управляющими решениями.

I

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящей главе макроэкономические процессы изучаются как переходные процессы в динамических системах, поэтому экономика рассматривается как динамическая система.

Дается ориентированное на экономику описание математических методов исследования динамических систем, а также рассматриваются математические модели переходных процессов в макроэкономической системе.

1.1. Экономика как нелинейная динамическая система. Модель Солоу

Основные понятия и определения

Система — это совокупность составляющих ее элементов и взаимосвязей между ними[1]. Социально-экономические системы — *целереализующие* системы.

Подсистема — часть системы, реализующая цели, согласованные с целями системы или являющиеся частью целей системы. Если автономные цели подсистемы противоречат целям системы, то через определенное время произойдет распад системы.

Надсистема — окружающая систему среда, в которой функционирует система.

Любая система обладает свойством *эмерджентности*, т.е. такими свойствами, которые не присущи отдельным составляющим ее элементам.

Экономическая система, понимаемая как национальная, — это совокупность национальных хозяйственных единиц (предприятий, организаций), объединенных производственно-технологическими и организационно-хозяйственными связями.

В свою очередь хозяйственная единица может иметь сложную структуру.

Экономическая система состоит из двух главных подсистем: *производственной* и *финансово-кредитной*.

[1] Здесь приведено одно из многих определений системы, наиболее соответствующее дальнейшему изложению.

Надсистемой экономики как системы служат экономика других стран, природа и общество.

Любая целереализующая (самоорганизующаяся) система или любая ее подсистема, любой ее элемент, в свою очередь, могут рассматриваться как контур обратной связи, состоящий из *управляемого объекта O* и *органа управления* (регулятора) R, как это показано на рис. 1.1, на котором введены следующие обозначения:

x — вход в управляемый объект (например, ресурсы);

y — выход из управляемого объекта (например, продукция);

u — управляющий сигнал (выход органа управления).

Пунктиром обозначен агрегированный элемент.

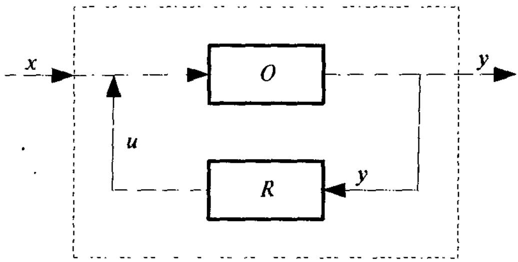

Рис. 1.1. Структурная схема управляемого объекта

Элементы, из которых состоит система, могут быть статическими или динамическими.

Статический элемент системы

Статический элемент без задержки (мгновенно) преобразует вход x в выход $y = F(x)$.

Иными словами, этот элемент рассматривается как «черный ящик», внутреннее устройство которого в данном исследовании не принимается во внимание, а предметом изучения является то, как вход преобразуется в выход. Причина x мгновенно преобразуется в следствие y. Время t подразумевается по умолчанию. Оно одинаково для входа и выхода.

Например, в теории однопродуктовой фирмы выпуск y задается как функция затраченных на выпуск ресурсов:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = F(x),$$

где $F(x)$ — вообще говоря, нелинейная производственная функция многих переменных $x_1, \dots, x_n$.

Таким образом, фирма рассматривается как *нелинейный статический элемент.*

Другим примером является описание экономики страны в виде макроэкономической производственной функции

$$Y = F(K, L),$$

где Y — валовой внутренний продукт;
K — основные производственные фонды;
L — число занятых.

Так, мультипликативная производственная функция экономики США, расчитанная по данным за 1980—1995 гг., имеет вид:

$$Y = 2{,}248K^{0{,}404}L^{0{,}803},$$

где Y, K измеряются в млрд. долл., а L — в млн. чел.

Динамический элемент системы

Динамический элемент характеризуется тем, что его выход в любой момент времени t зависит не только от входа в настоящий момент t, но и от значений входа и, быть может, выхода в прошлые моменты времени $t-1$, $t-2$, ...

Например, в статической форме линейная связь между национальным доходом N и потреблением C в любой год t может быть представлена в форме (индекс времени t опущен, но подразумевается по умолчанию):

$$C = aN \text{ (статический элемент)},$$

где a — доля фонда потребления в национальном доходе.

В динамике эта связь может быть представлена в виде:

$$C_t = a_0N_t + a_1N_{t-1} + a_2N_{t-2} \text{ (динамический элемент)},$$

т.е. потребление в текущий год t зависит от величины национального дохода не только в настоящий год t, но и в предшествующие годы $t-1$, $t-2$.

Таким образом, в динамическом элементе причина переходит в следствие не мгновенно, а с некоторым запозданием.

Динамическая система

Система называется ***динамической***, если в ее составе имеется хотя бы один динамический элемент.

▷ **Пример 1.1.** ***Экономика в форме модели Солоу как динамическая система.*** В модели Солоу экономика рассматривается как замкнутое единое неструктурированное целое, производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться.

В этой модели рассматривается пять макроэкономических показателей (эндогенных переменных):

Y — валовой внутренний продукт (ВВП);

I — валовые инвестиции;

C — фонд потребления;

K — основные производственные фонды;

L — число занятых в производственной сфере.

Первые три переменные (Y, I, C) являются показателями типа потока (их значения накапливаются в течение года), переменные K, L — мгновенные переменные (их значения могут быть измерены, вообще говоря, в любой момент непрерывного времени).

Модель Солоу с дискретным временем. Модель Солоу с дискретным временем задается системой уравнений вида:

$$\left.\begin{array}{lr} Y_t = F(K_t, L_t), & (1) \\ Y_t = I_t + C_t, & (2) \\ K_t = (1-\mu)K_{t-1} + I_{t-1}, & (3) \\ L_t = (1+\nu)L_{t-1}, \qquad t = 1, 2, ..., T, & (4) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

где $t = 0$ — базовый год;

$t = T$ — конечный год изучаемого периода;

K_0, I_0, L_0 считаются заданными.

С содержательной точки зрения эти уравнения имеют следующий смысл. Первое уравнение задает ВВП как производственную функцию от ресурсов — основных производственных фондов и числа занятых, второе уравнение — распределение ВВП на валовые инвестиции и потребление. Третье уравнение — это рекуррентное соотношение для определения ОПФ будущего года по значениям ОПФ и инвестиций текущего года. В этом уравнении μ — коэффициент выбытия (износа) ОПФ в расчете на год. Данный коэффициент предполагается постоянным. Из уравнения видно, что инвестиции, сделанные в текущем году, материализуются в фонды в будущем году, т.е. лаг капиталовложений равен одному году. Четвертое уравнение — это рекуррентное соотношение для определения числа занятых в будущем году на основании числа занятых в текущем году. Как видим, данное уравнение основано на гипотезе постоянства годового темпа прироста числа занятых ν.

С точки зрения классификации элементов на статические и динамические, уравнения **(1.1.1)** (каждое из которых является формализованной записью элемента) могут быть истолкованы следующим образом. Первое уравнение задает нелинейный статический элемент (вход — K_t, L_t, выход — Y_t), второе уравнение — линейный статический элемент (вход — Y_t, выход — I_t, C_t), третье уравнение — линейный динамический элемент (вход — K_{t-1}, I_{t-1}, выход — K_t), четвертое уравнение — линейный динамический элемент (вход — L_{t-1}, выход — L_t).

Таким образом, экономика в форме модели Солоу, видимым образом неструктурированная, на самом деле структурируется в контур с обратной связью, показанный на рис. 1.2. Тем самым экономика в форме модели Солоу является *динамической* системой, поскольку в ее составе имеются динамические элементы.

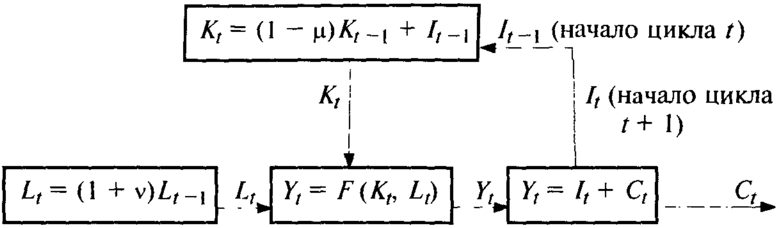

Рис. 1.2. ***Структурная схема модели Солоу***

Структурную схему, представленную на рис. 1.2, можно перестроить с управленческой точки зрения. В самом деле, в реальной экономике одним из наиболее важных рычагов управления является распределение ВВП на накопление (валовые инвестиции) и потребление. Поэтому статическое распределительное звено (второе уравнение **(1.1.1)**) на самом деле можно рассматривать как управляющее. Подобный вариант структуры показан на рис. 1.3. На этой схеме первое и третье звенья вместе образуют объект управления, второе (распределительное) звено играет роль управляющего, а выход четвертого звена L_t служит входом в систему, выходом которой является потребление C_t. Сама система из управляемого объекта и управляющего звена выделена пунктиром.

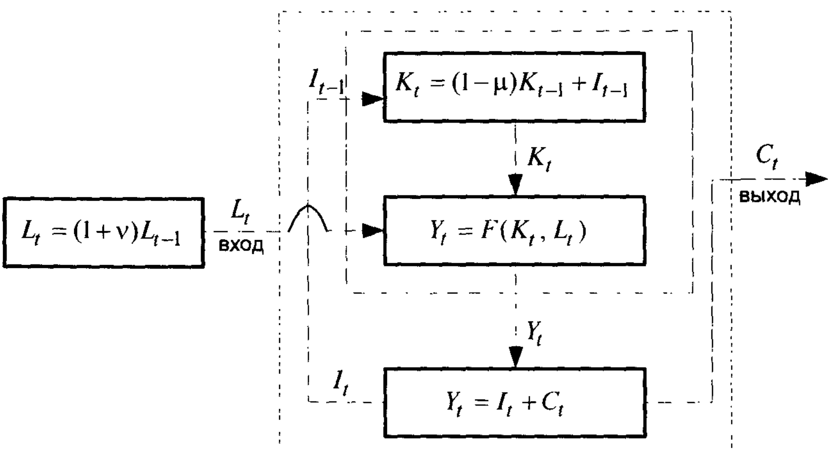

Рис. 1.3. ***Скорректированная структурная схема модели Солоу***

Модель Солоу с непрерывным временем. Предположим теперь, что время, измеряемое вначале с дискретностью в один год, будет измеряться с дискретностью Δt (например, полугодие, квартал, месяц, декада, день). При дискретности в один день время можно считать практически непрерывным.

При дискретности Δt модель Солоу будет выглядеть следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} Y_t = F(K_t, L_t), \\ Y_t = I_t + C_t, \\ K_t - K_{t-\Delta t} = (-\mu K_{t-\Delta t} + I_{t-\Delta t})\Delta t, \\ L_t - L_{t-\Delta t} = \nu L_{t-\Delta t}\Delta t,\ t = \Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta t, n = \left[\dfrac{T}{\Delta t}\right], \end{array}\right\} \qquad \mathbf{(1.1.2)}$$

где Y_t, I_t, C_t — соответственно ВВП, инвестиции и потребление за год, начинающийся в момент t;

$\mu K_{t-\Delta t}\Delta t$ — выбытие фондов за время $(t - \Delta t, t)$;

$I_{t-\Delta t}\Delta t$ — инвестиции за время $(t - \Delta t, t)$;

$\nu L_{t-\Delta t}\Delta t$ — прирост числа занятых за время $(t - \Delta t, t)$.

При переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ уравнения **(1.1.2)** принимают следующую форму (*уравнения модели Солоу с непрерывным временем*):

$$\left.\begin{array}{ll} Y_t = F(K_t, L_t), & (1) \\ Y_t = I_t + C_t, & (2) \\ \dfrac{dK}{dt} = -\mu K + I, \quad K(0) = K_0, & (3) \\ \dfrac{dL}{dt} = \nu L, \quad L(0) = L_0, \qquad t \in [0, T]. & (4) \end{array}\right\} \qquad \mathbf{(1.1.3)}$$

Данная модель может быть представлена в такой же структурной форме, как это показано на рис. 1.2, 1.3, однако при этом уравнения (3), (4) **(1.1.1)** должны быть заменены уравнениями (3), (4) **(1.1.3)**.

Следует отметить, что модель Солоу в дискретной форме **(1.1.1)** и модель Солоу в непрерывной форме **(1.1.3)**, несомненно, являются разными моделями и расчеты по ним приводят к разным, однако достаточно близким, результатам. ▶

Как видно из примера 1.1, экономические динамические системы могут быть представлены в форме конечно-разностных уравнений (дискретное время) и в форме дифференциальных уравнений (непрерывное время). Между математическими методами дифференциальных и конечно-разностных уравнений нет существенного различия: при решении дифференциальных уравнений на ЭВМ их приближенно заменяют на конечно-разностные; напротив, любое конечно-разностное уравнение можно приближенно заменить дифференциальным.

З а м е ч а н и е. При характеристике модели Солоу обычно говорят, что в ней экономика представляет собой неструктурированное целое и производит один агрегированный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Данное утверждение можно интерпретировать как представление экономики в виде одного динамического элемента (ведь экономика неструктурирована!).

Однако при более детальном знакомстве с моделью (как это следует из примера 1.1) становится ясно, что экономика в форме модели Солоу состоит из четырех элементов, объединенных в контур обратной связи. Кроме того, экономика *нелинейна*, поскольку связь между выпуском и затратами ресурсов задается в виде нелинейной производственной функции.

Таким образом, даже агрегированное модельное представление экономики позволяет сделать вывод о том, что она является *сложной динамической системой.*

1.2. Линейная динамическая система. Равенство спроса и предложения: динамическая модель Кейнса. Модель Самуэльсона–Хикса

Основные результаты в исследовании динамических систем с непрерывным временем были получены при изучении технических систем в рамках теории автоматического регулирования. В качестве основного математического инструмента при этом использовался аппарат дифференциальных уравнений. Полученные для технических приложений результаты ныне постепенно адаптируются к экономике.

В настоящем параграфе экономические динамические системы рассматриваются как линейные динамические системы с непрерывным временем. Необходимый для их изучения аппарат дифференциальных уравнений справочно приведен в Приложении 1. В случае нелинейности динамической системы необходимо применять либо более сложный математический аппарат для ее изучения, либо линеаризовать систему.

Линейный динамический элемеит

Поскольку динамическая система имеет в своем составе хотя бы один динамический элемент, а статический элемент является частным случаем динамического, то вначале целесообразно изучить поведение динамического элемента.

Нелинейный динамический элемент n-го порядка задается уравнением вида

$$F(y^{(n)}, ..., y', y, x^{(m)}, ..., x', x) = 0,$$

где $x(t)$ — входное воздействие на элемент (вход);

$y(t)$ — реакция элемента на входное воздействие (выход);

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}, \qquad x^{(m)} = \frac{d^m x}{dt^m}.$$

В частности, линейный динамический элемент n-го порядка задается линейным дифференциальным уравнением

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}. \tag{1.2.1}$$

Наиболее часто в практических приложениях встречаются элементы нулевого порядка (*мультипликатор*, *акселератор*), первого порядка (*инерционное звено*) и второго порядка. Звено второго порядка может быть либо *колебательным звеном*, либо двумя последовательно соединенными инерционными звеньями.

Мультипликатор

Мультипликатор — линейное статическое звено, задаваемое уравнением

$$a_0 y = b_0 x, \qquad \text{или} \qquad y = \alpha x, \qquad \alpha = b_0 / a_0.$$

Например, валовые инвестиции I как вход следующим образом связаны с валовым внутренним продуктом Y как выходом:

$$Y = \frac{1}{\rho} I,$$

где ρ — доля валовых инвестиций в ВВП;

$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} > 1\right)$ — коэффициент усиления (мультипликатор), который показывает, на сколько должен быть увеличен ВВП для увеличения валовых инвестиций на единицу.

Таким образом, в *широком* смысле мультипликатор — усилительное линейное статическое звено, в *узком* смысле — сам коэффициент усиления.

Акселератор

Акселератор — дифференцирующее звено нулевого порядка, выход которого пропорционален скорости входа.

Например, инвестиции могут быть выражены через скорость изменения ВВП следующим образом:

$$I = r\frac{dY}{dt},$$

где r — коэффициент акселерации, т.е. прирост потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу.

При дискретности времени Δt или $\Delta t = 1$ (один год) то же уравнение выглядит следующим образом:

$$I_t \Delta t = r\Delta t(Y_t - Y_{t-\Delta t}), \qquad I_t = r(Y_t - Y_{t-1}).$$

Инерционное звено

Инерционное звено задается дифференциальным уравнением первого порядка

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t), \quad a_0 \neq 0. \tag{1.2.2}$$

Уравнение **(1.2.2)** можно привести к стандартному виду путем деления его на a_0:

$$T\frac{dy}{dt} + y = \tilde{x}(t), \tag{1.2.3}$$

где $T = \dfrac{a_1}{a_0}, \quad \tilde{x}(t) = \dfrac{x(t)}{a_0}.$

(Содержательный смысл постоянной времени T будет выяснен ниже.)

Инерционное звено описывает процесс «отработки» заданного входного воздействия $x(t)$ (значок «~» опустим), таким образом, что скорость «отработки» пропорциональна разности между входом и выходом:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T}[x(t) - y(t)].$$

▷ **Пример 1.2.** ***Модель освоения введенных производственных мощностей.*** Обозначим через x ($x = \text{const}$) введенную производственную мощность, а через $y(t)$ — фактическое производство на базе этой мощности в момент t (фактическое использование мощности, $y(t) \leq x$). Сделав предположение, что прирост производства пропорционален недоиспользованной мощности:

$$\Delta y = \gamma(x - y)\Delta t,$$

приходим к уравнению инерционного звена:

$$T\frac{dy}{dt} + y = x, \quad T = \frac{1}{\gamma}, \quad y(0) = y_0, \quad y_0 < x. \tag{1.2.4}$$

В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений (см. Приложение 1) общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Общее решение однородного уравнения

$$T\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{1.2.5}$$

имеет вид:

$$y=ce^{\lambda t}.$$

Подставив его в **(1.2.5)**, получим:

$$(T\lambda+1)y=0,$$

но $y\neq 0$, поэтому приходим к характеристическому уравнению (относительно λ):

$$T\lambda+1=0, \quad \text{или} \quad \lambda=-\frac{1}{T}.$$

Поскольку частным решением неоднородного уравнения **(1.2.4)** является $y = x$, то общее решение этого уравнения примет вид:

$$y=x+Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

Константу C находим из начального условия

$$y(0)=x+C=y_0, \qquad C=y_0-x,$$

поэтому окончательно имеем

$$y(t)=x+(y_0-x)e^{-\frac{t}{T}}.$$

Переходный процесс освоения производственных мощностей, описываемый этим решением, завершается выходом на заданный размер мощности

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=x.$$

Общая картина переходного процесса показана на рис. 1.4.

Рис. 1.4. ***Переходный процесс освоения производственных мощностей***

При $y_0 = 0$ решение примет вид:

$$y(t) = x\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

поэтому $y(T) = x(1 - e^{-1})$, т.е. постоянную времени T можно определить как длину промежутка времени, в течение которого переходный процесс проходит основную часть (≈2/3) своего пути от 0 до x. ▶

▷ **Пример 1.3.** ***Модель установления равновесной цены.*** В модели рассматривается рынок одного товара, время считается непрерывным, спрос d и предложение s линейно зависят от цены:

$$d = a - bp, \quad s = \alpha + \beta p, \quad a > 0, \quad b > p, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad a > \alpha.$$

Основное предположение модели состоит в том, что изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\Delta p = \gamma(d - s)\Delta t, \qquad \gamma > 0,$$

т.е. в случае действительного превышения спроса над предложением цена возрастает, в противном случае — падает.

Из основного предположения модели вытекает следующее дифференциальное уравнение для цены:

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dt} + (b + \beta)p = a - \alpha, \quad p(0) = p_0,$$

т.е. процесс описывается уравнением инерционного звена с $T = \dfrac{1}{\gamma(b + \beta)}$ и $p_E = \dfrac{a - \alpha}{b + \beta}$, где p_E — равновесная цена (точка пересечения прямых спроса и предложения). Таким образом, цена как выход инерционного звена ведет себя так, как это показано на рис. 1.4. ▶

Экономика в форме динамической модели Кейнса как инерционное звено

В этой модели предполагается, что ВВП $y(t + 1)$ в следующем году равен совокупному спросу предыдущего (текущего) года, а совокупный спрос, состоящий из спроса на потребительские (C) и инвестиционные (I) товары, зависит только от ВВП текущего года:

$$y(t + 1) = C[y(t)] + I(t).$$

При линейной зависимости спроса на потребительские товары от ВВП и примерном постоянстве спроса на инвестиционные товары приходим к соотношению

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + I, \tag{1.2.6}$$

где $\underline{C}$ — минимальный объем фонда потребления;

c $(0 < c < 1)$ — склонность к потреблению.

Соотношение, действующее при дискретности времени в один год, при дискретности Δt примет форму:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = [\underline{C} - (1-c)y(t) + I]\Delta t,$$

где $(1 - c)$ — склонность к накоплению.

При $\Delta t \to 0$ приходим к уравнению инерционного звена (роль постоянной времени выполняет величина $\frac{1}{1-c}$, обратная склонности к накоплению):

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c}.$$

Последнее уравнение имеет равновесное (стационарное) решение

$$y_E = \frac{\underline{C} + I}{1-c}.$$

Если в начальный момент спрос на инвестиционные товары изменился с величины I_0 до I $(I > I_0)$, то в экономике будет происходить переходный процесс от значения ВВП $y_0 = \frac{\underline{C} + I_0}{1-c}$ до значения y_E (см. рис. 1.4). При этом $y(t) = y_E + (y_0 - y_E)e^{-t(1-c)}$.

Передаточная функция

Понятие передаточной функции динамического элемента связано с *операторным методом* решения дифференциального уравнения. Суть метода состоит в сведéнии решения дифференциального уравнения к решению алгебраического уравнения. В основе метода — переход от первоначальных функций времени $x(t)$, $y(t)$ к их образам $X(s)$, $Y(s)$ — преобразованиям Лапласа этих функций. Необходимые свéдения о преобразованиях Лапласа даны в Приложении 1, здесь же напомним только определение преобразования Лапласа для некоторой функции $f(t)$:

$$F(s) = L_f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \tag{1.2.7}$$

а также формулу обратного перехода от образа к прообразу:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{st} F(s)ds, \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{1.2.8}$$

Образ производной можно найти по образу функции:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,$$

поэтому

$$L_{f'}(s) = -f(0) + sF(s). \tag{1.2.9}$$

$$Lf^{(n)}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f'(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

В частности, при $f(0) = 0$ $L_{f'} = sF(s)$.

При $f^{(i)}(0) = 0,\ \ i = 0, \ldots, n-1,\ \ Lf^{(n)}(s) = s^n F(s).$

В табл. 1.1 приведены преобразования Лапласа некоторых функций.

Таблица 1.1. ***Преобразования Лапласа типовых функций***

$f(t),\ t > 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\chi(t)$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения динамического элемента **(1.2.1)** (пользуясь формулой **(1.2.9)** для образа производных):

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right) Y(s) - N(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right) X(s) - M(s),$$

где $N(s) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{l=0}^{n-1} y^{(l)}(0) s^{n-1-l}, \quad M(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{l=0}^{m-1} x^{(l)}(0) s^{m-1-l},$

откуда

$$Y(s) = G(s)X(s) + R(s), \tag{1.2.10}$$

где $G(s) = \dfrac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{j=0}^{n} a_j s^j}, \quad R(s) = \dfrac{N(s) - M(s)}{\sum_{j=0}^{n} a_j s^j},$

$R(s) = 0$ при $y^{(j)}(0) = x^{(i)}(0) = 0, \quad j = 0, \ 1, \ldots, n-1, \quad i = 0, \ 1, \ldots, m-1.$

Передаточной функцией $G(s)$ динамической системы (подсистемы, элемента) называется отношение образа выхода к образу входа при нулевых условиях.

Из **(1.2.10)** видно, что передаточная функция линейного динамического элемента является дробно-рациональной функцией параметра s. Например, передаточная функция инерционного звена равна (см. **(1.2.3)**)

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}.$$

В передаточной функции динамической системы (подсистемы, звена) содержатся все сведения о ее поведении при нулевых начальных условиях. В самом деле, по входу $x(t)$ находим его образ $X(s)$, затем умножаем этот образ на передаточную функцию, тем самым получаем образ выхода $Y(s) = G(s)X(s)$ и, наконец, пользуясь либо табл. 1.1, либо непосредственно формулой **(1.2.8)**, определяем выход $y(t)$. Если начальные условия ненулевые, то к этому решению еще добавится «шлейф», образ которого — $R(s)$.

Колебательное звено

Колебательное звено задается дифференциальным уравнением второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}(t) \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

с отрицательным дискриминантом, составленным из коэффициентов в левой части уравнения **(1.2.11)** $a_1^2 - 4a_2 a_0 < 0$.

Колебательное звено описывает циклические процессы в экономике.

▷ **Пример 1.4.** ***Однономенклатурная система управления запасами как колебательное звено.*** Пусть $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ — фактические интенсивности расхода и поступления товара в систему управления запасами в момент t. Поскольку интенсивность расхода заранее неизвестна, то всегда будет образовываться запас $y(t)$ (если $y(t) > 0$, то это действительно запас, если $y(t) < 0$, то это дефицит). Изменение запаса следующим образом связано с интенсивностями расхода и поставок:

$$\Delta y = (\tilde{x} - x)\Delta t, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dt} = \tilde{x} - x. \qquad \textbf{(1.2.12)}$$

Управлять интенсивностью поставок можно только по известному значению запаса $y(t)$ (ведь интенсивность расхода неизвестна!).

Имеется два варианта управления:

1) изменение поставок пропорционально (с обратным знаком) величине запаса (при положительном запасе интенсивность поставок уменьшается, при отрицательном — увеличивается):

$$\Delta\tilde{x} = -a_0 y \Delta t, \qquad a_0 > 0;$$

2) изменение интенсивности поставок пропорционально (с обратным знаком) как запасу, так и скорости его изменения:

$$\Delta\tilde{x} = -\left(a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt}\right)\Delta t, \quad a_0 > 0, \; a_1 > 0, \; a_0 > \frac{a_1^2}{4}$$

(при положительном запасе интенсивность поставок уменьшается, при отрицательном — увеличивается, при положительной скорости роста запаса интенсивность поставок уменьшается, при отрицательной — увеличивается).

П е р в ы й с л у ч а й. Взяв производную от обеих частей **(1.2.12)** и подставив в это выражение $\frac{d\tilde{x}}{dt} = -a_0 y$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка для запаса:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_0 y = -\frac{dx}{dt}. \qquad \textbf{(1.2.13)}$$

Это уравнение колебательного звена с $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ и дискриминантом $d = -4a_0 < 0$. Характеристическое уравнение имеет вид (подставляем в однородное уравнение $y = Ce^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + a_0 = 0.$$

Его корни взаимно сопряженные мнимые:

$$\lambda_1 = i\sqrt{a_0}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{a_0}, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Пусть на вход системы, находившейся в начальный момент в состоянии равновесия $x = 0, y = 0, y'(0) = 0$, начали поступать заявки на товар с интенсивностью $x(t) = x = \text{const}$. Таким образом, интенсивность расхода можно представить в виде графика, показанного на рис. 1.5.

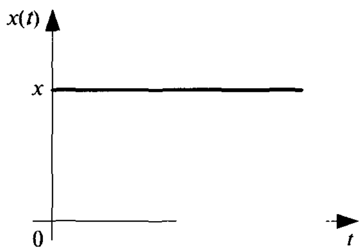

Рис. 1.5. ***Интенсивность расхода***

Или алгебраически:

$$x(t) = x \cdot \chi(t), \qquad \chi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $\chi(t)$ — функция Хэвисайда.

Производная от функции Хэвисайда равна обобщенной функции Дирака $\delta(t)$, которая принимает бесконечно большое значение в точке $t = 0$, равна нулю при $t \neq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$

Поскольку

$$\chi'(t) = \delta(t),$$

то в этой ситуации $\dfrac{dx}{dt} = x\delta(t)$, и уравнение **(1.2.13)** принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_0 y = -x\delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \qquad \textbf{(1.2.14)}$$

Решим это уравнение операторным методом, применив преобразование Лапласа к обеим частям уравнения:

$$(s^2 + a_0)Y(s) = -x, \qquad \textbf{(1.2.15)}$$

где $Y(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt$ — преобразование Лапласа выхода $y(t)$;

$-x = \int\limits_0^\infty e^{-st} (-x\delta(t))\, dt$ — преобразование Лапласа от правой части **(1.2.15)**,

поскольку $\int\limits_0^\infty e^{-st} \delta(t)\, dt = 1.$

Из **(1.2.15)** находим преобразование Лапласа выхода $y(t)$:

$$Y(s) = -\frac{x}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega = \sqrt{a_0}.$$

И, наконец, по табл. 1.1 восстанавливаем выход:

$$y(t) = -\frac{x}{\omega} \sin \omega t.$$

Таким образом, в первом случае при постоянной интенсивности расхода x запас $y(t)$ будет испытывать незатухающие гармонические колебания с амплитудой $\frac{x}{\omega}$ (рис. 1.6).

При таких незатухающих колебаниях промежутки, когда имеется действительный запас $y(t) > 0$, будут чередоваться с промежутками дефицита $y(t) < 0$, что крайне отрицательно скажется на финансовом положении организации, отвечающей за систему управления запасами. Для того чтобы система управления запасами снова вошла в состояние равновесия, необходимо учитывать не только величину запаса $y(t)$, но и скорость его изменения $\frac{dy}{dt}$, как это и предусмотрено во втором случае.

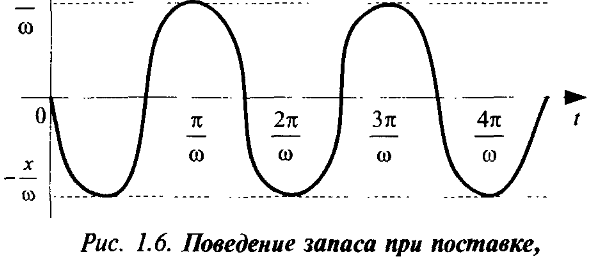

Рис. 1.6. ***Поведение запаса при поставке, пропорциональной запасу***

Второй случай. Снова, как и в первом случае, берем производную от обеих частей **(1.2.12)** и подставляем в это выражение $\frac{d\tilde{x}}{dt} = -\left(a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt}\right)$. Получаем дифференциальное уравнение второго порядка для запаса:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = -\frac{dx}{dt}. \qquad \textbf{(1.2.16)}$$

Уравнение **(1.2.16)** отличается от **(1.2.13)** наличием в левой части члена $a_1 \frac{dy}{dt}$, пропорционального скорости изменения запаса.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Его корни взаимно сопряженные комплексные с отрицательной действительной частью:

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\omega,$$

где $\alpha = \frac{a_1}{2}$, $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$.

Если с момента времени $t = 0$ на вход системы стали поступать заявки на товар с постоянной интенсивностью $x(t) = x = \text{const}$, то уравнение **(1.2.16)**, описывающее поведение системы, принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = -x\delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \qquad \textbf{(1.2.17)}$$

Снова решим это уравнение операторным методом. Имеем:

$$(s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = -x,$$

откуда

$$Y(s) = -\frac{x}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Представив $s^2 + a_1 s + a_0$ в виде $(s+\alpha)^2 + \omega^2$, где $\alpha = \frac{a_1}{2}$, $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$, из табл. 1.1 находим

$$y(t) = -\frac{x}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Таким образом, поведение запаса описывается затухающими гармоническими колебаниями с амплитудой $e^{-\alpha t} \frac{x}{\omega}$, график которых приведен на рис. 1.7. ▶

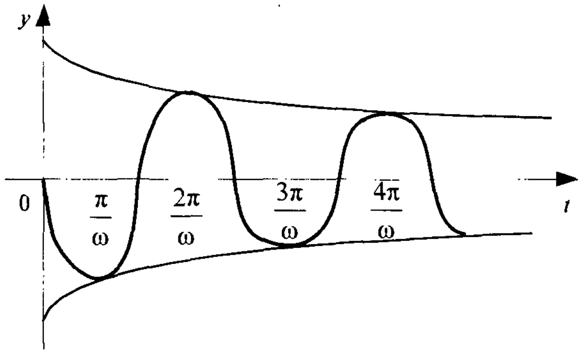

Рис. 1.7. ***Поведение запаса при поставке, пропорциональной запасу и скорости его изменения***

Экономика в форме модели Самуэльсона–Хикса как линейное динамическое звено второго порядка

Модель Самуэльсона—Хикса отличается от динамической модели Кейнса введением в соотношение **(1.2.6)** акселератора (далее под $y(t)$ будем понимать ВВП, поскольку большая буква Y используется для обозначения образа выхода):

$$I(t) = r[y(t) - y(t-1)] + I,$$

где $r\,(0 < r < 1)$ — коэффициент акселерации, показывающий, на сколько возрастут инвестиции, если ВВП возрастет на единицу.

С учетом введенного соотношения линеаризованная модель Самуэльсона—Хикса примет вид:

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + r[y(t) - y(t-1)] + I,$$

или

$$y(t+1) - 2y(t) + y(t-1) = \underline{C} + I - (1-c)y(t) - (1-r)[y(t) - y(t-1)].$$

Последнее соотношение при дискретности Δt имеет вид:

$$y(t+\Delta t) - 2y(t) + y(t-\Delta t) = [\underline{C} + I - (1-c)y(t)](\Delta t)^2 -$$

$$-(1-r)[y(t) - y(t-\Delta t)]\Delta t.$$

При переходе к непрерывному времени, т.е. при $\Delta t \to 0$, окончательно получаем уравнение линейного динамического звена второго порядка:

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{I + \underline{C}}{1-c}.$$

Данное уравнение имеет частное стационарное решение, по форме такое же, как и в модели Кейнса:

$$y_E = \frac{\underline{I} + \underline{C}}{1 - c}.$$

Общее решение уравнения равно сумме частного и общего решений однородного уравнения:

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Общее решение последнего уравнения является (см. Приложение 1) линейной комбинацией экспонент $e^{\lambda t}$, параметры λ которых удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\frac{1}{1-c}\lambda^2 + \frac{1-r}{1-c}\lambda + 1 = 0.$$

Исследование этого решения и тем самым исследование поведения экономики в форме модели Самуэльсона—Хикса приведено в § 1.3.

Характеристики динамического звена

Все сведения о возможных вариантах поведения динамического звена содержатся в его уравнении. Эти же сведения в закодированном виде содержат *характеристики* звена. Основной характеристикой звена является передаточная функция. Выше было показано, как с помощью передаточной функции по заданному входу найти выход. Точно такое же назначение имеют и другие характеристики.

Импульсной характеристикой (функцией) называется ответная (выходная) реакция динамического звена на импульсное входное воздействие в форме функции Дирака $\delta(t)$.

Поскольку образ функции Дирака

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t) dt = 1,$$

то образ импульсной характеристики

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s).$$

Поэтому сама импульсная характеристика

$$g(t) = L^{-1}[G(s)],$$

где L^{-1} — обратное преобразование Лапласа.

Переходной характеристикой (функцией) называется ответная реакция динамического звена на ступенчатое входное воздействие в форме функции Хэвисайда $\chi(t)$.

Поскольку образ функции Хэвисайда

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}\chi(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},$$

то образ переходной функции:

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{G(s)}{s}.$$

Поэтому сама переходная функция

$$\gamma(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right].$$

Частотная характеристика задает установившуюся реакцию динамического звена в форме вынужденных автоколебаний на синусоидальное входное воздействие $\sin\omega t$ и равна $G(i\omega)$.

Амплитуда выходных колебаний равна $|G(i\omega)|$, а сдвиг по фазе $\varphi=\arg[G(i\omega)]$.

▷ **Пример 1.5.** ***Характеристики инерционного звена.*** Напомним, что инерционное звено задается уравнением **(1.2.3)**:

$$T\frac{dy}{dt}+y=x(t),$$

передаточная функция которого

$$G(s)=\frac{1}{1+Ts}.$$

Найдем *импульсную характеристику* звена, т.е. реакцию на импульсное входное воздействие в форме функции Дирака $\delta(t)$. Поскольку образ характеристики равен передаточной функции $\dfrac{1}{1+Ts}$, то по табл. 1.1 находим прообраз, т.е. импульсную функцию инерционного звена

$$g(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

Итак, если на вход находящегося в начальный момент в покое инерционного звена подано импульсное воздействие, то после затухающего экспоненциально переходного процесса звено снова возвратится в состояние покоя. График переходного процесса (импульсной функции) показан на рис. 1.8.

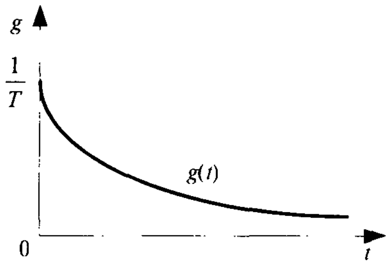

Рис. 1.8. ***Импульсная функция инерционного звена***

Переходная функция как реакция на единичное ступенчатое воздействие $\chi(t)$ имеет своим образом (см. выше)

$$\frac{G(s)}{s}=\frac{1}{s(1+Ts)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{1+Ts},$$

поэтому сама переходная функция как прообраз равна (вновь используем табл. 1.1)

$$\gamma(t)=\chi(t)-e^{-\frac{t}{T}}=1-e^{-\frac{t}{T}}, \qquad t>0.$$

Следовательно, после завершения экспоненциального переходного процесса инерционное звено перейдет в новое состояние равновесия

$$\lim_{t\to 0}\gamma(t)=1.$$

График переходной функции инерционного звена представлен на рис. 1.9.

Рис. 1.9. ***Переходная функция инерционного звена***

Теперь найдем реакцию инерционного звена на *синусоидальное входное воздействие* $\sin \omega t$ по табл. 1.1:

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

поэтому образ выхода

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{\omega}{(1+Ts)(\omega^2 + s^2)}.$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{\omega}{1+\omega^2 T^2}\left(\frac{T^2}{Ts+1} + \frac{1}{\omega^2 + s^2} + \frac{Ts}{\omega^2 + s^2}\right)$$

и по табл. 1.1 найти его прообраз (реакцию системы на синусоидальное воздействие):

$$y(t) = \frac{1}{1+\omega^2 T^2}\left(T\omega e^{-\frac{t}{T}} + \sin \omega t - \omega T \cos \omega t\right).$$

Первое слагаемое — быстро затухающий экспоненциальный переходный процесс, второе и третье слагаемые — вынужденные гармонические колебания.

Итак, в результате указанного воздействия на выходе по завершении переходного процесса установятся вынужденные автоколебания:

$$y_E(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\left(\frac{\sin \omega t}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} - \frac{\omega T}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cos \omega t\right) = \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \qquad \sin \varphi = \frac{\omega T}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}},$$

амплитуда которых равна $\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$, т.е. меньше амплитуды входных колебаний в $\sqrt{1+\omega^2 T^2}$ раз, а сдвиг по фазе равен $\varphi = -\mathrm{arctg}(\omega T)$.

На рис. 1.10 показаны входное синусоидальное воздействие и выходные установившиеся гармонические колебания с амплитудой $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ и сдвигом по фазе $\varphi = -\mathrm{arctg}(\omega T)$.

Все сведения об амплитуде и сдвиге по фазе вынужденных автоколебаний по отношению к синусоидальному входу содержатся в *частотной характеристике*. Действительно,

$$G(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - \frac{i\omega T}{1+\omega^2 T^2},$$

поэтому радиус частотной характеристики (корень квадратный из суммы квадратов действительной и минимальной частей) равен $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$, т.е. амплитуде выхода, а аргумент — сдвигу по фазе φ. ▶

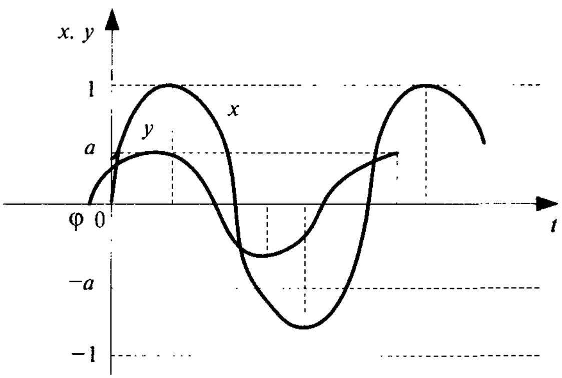

Рис. 1.10. ***Установившиеся автоколебания на выходе инерционного звена в ответ на входное гармоническое воздействие***

1.3. Анализ и синтез динамических систем. Устойчивость динамических систем. Устойчивость и синергетика модели Самуэльсона—Хикса

Анализ динамической системы — это разбиение системы на элементы и установление связей между ними.

Существуют три основных вида соединений (связей) между элементами динамической системы:

1) *последовательное соединение* (рис. 1.11) — вход соединения является входом первого элемента, выход первого элемента — входом второго элемента, выход второго элемента — выходом соединения;

2) *параллельное соединение с суммирующим звеном* (рис. 1.12) — вход соединения является одновременно и входом каждого из элементов, сумма (разность) выходов элементов — выход соединения;

3) *замкнутый контур с обратной связью* (рис. 1.13) — в контуре имеются управляемый и управляющий элементы и суммирующее звено, вход в контур в сумме (разности) с выходом управляющего

элемента поступает на вход управляемого элемента, выход последнего является выходом соединения.

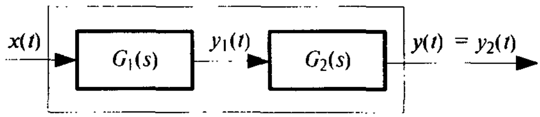

Рис. 1.11. ***Последовательное соединение***

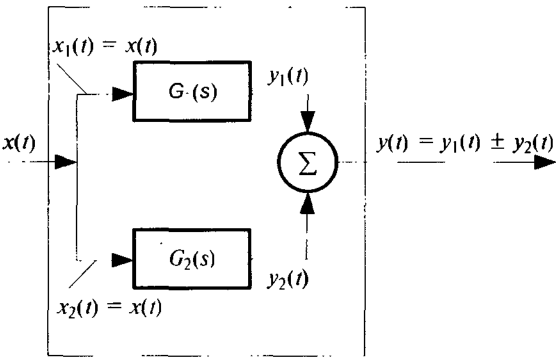

Рис. 1.12. ***Параллельное соединение***

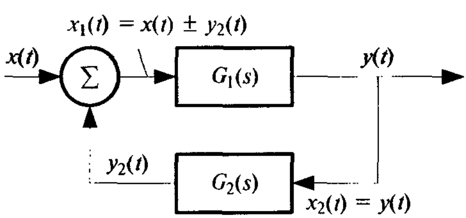

Рис. 1.13. ***Контур обратной связи***

Синтез динамической системы заключается в построении (проектировании) системы с требуемыми свойствами либо возможно близкими к требуемым.

Например, наиболее частым и важным является требование устойчивости системы. Первый шаг в этом направлении — определить характеристики системы по характеристикам составляющих ее элементов. Решив эту первую задачу, можно подойти и к решению основной: меняя состав системы, взаимосвязи между элементами и характеристики элементов, можно из всех возможных вариантов выбрать такую систему, характеристики которой ближе всего к желаемым.

Поскольку основными соединениями элементов в системе являются последовательное, параллельное и контур с обратной связью, то прежде всего необходимо уметь находить характеристики этих соединений. Но все характеристики элементов и систем определяются по передаточной функции, поэтому задача сводится к нахождению передаточной функции соединения по передаточным функциям составляющих его звеньев.

Передаточная функция последовательного соединения

Последовательное соединение показано на рис. 1.11. Согласно определению передаточная функция есть отношение образов выхода и входа, поэтому

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_2(s)}{X_1(s)}=\frac{G_2(s)Y_1(s)}{X_1(s)}=G_1(s)G_2(s). \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

Таким образом, *передаточная функция последовательно соединенных элементов равна произведению их передаточных функций.*

▷ **Пример 1.6.** ***Модель ввода и освоения производственных мощностей.*** Выше было показано, что процесс освоения введенных производственных мощностей можно описать в форме инерционного звена. Если принять, что процесс ввода мощностей также можно описать с помощью инерционного звена, то объединенный процесс ввода и освоения мощностей, таким образом, подобен двум последовательно соединенным инерционным звеньям с постоянными времени T_1, T_2, где T_1, T_2 — длительности соответственно ввода и освоения примерно двух третей мощности.

Передаточная функция этого последовательного соединения

$$G(s)=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Отсюда

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{X(s)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{x}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

поскольку

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x\,dt=\frac{x}{s},$$

где x — полный объем вводимой и осваиваемой мощности.

Представим дробно-рациональное выражение образа выхода в виде отдельных простых дробей:

$$\frac{Y(s)}{x}=\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{T_1s+1}+\frac{\gamma}{T_2s+1}.$$

Коэффициенты дробей определим при приведении их к общему знаменателю:

$$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{\alpha(T_1s+1)(T_2s+1)+\beta s(T_2s+1)+\gamma s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

откуда (приравниваем нулю коэффициенты при s и s^2, а коэффициент при s^0 — единице)

$$\alpha=1,\ \beta=-(T_1+T_2)-\frac{T_2^2}{T_1-T_2},\ \gamma=\frac{T_2^2}{T_1-T_2}.$$

Теперь находим по табл. 1.1 прообраз каждой из простых дробей.

Образ	*Прообраз*
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{\beta}{T_1s+1}$	$\frac{\beta}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}$
$\frac{\gamma}{T_2s+1}$	$\frac{\gamma}{T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$

Окончательно получаем следующее выражение для введенной и освоенной мощности:

$$y(t)=x\left(1+\frac{\beta}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{\gamma}{T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right),$$

которое достаточно быстро сходится к полной мощности x. ▶

Передаточная функция параллельного соединения

Из рис. 1.12 видим, что

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_1(s)\pm Y_2(s)}{X(s)}=G_1(s)\pm G_2(s). \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

Таким образом, *передаточная функция параллельно соединенных элементов с суммирующим звеном равна сумме (разности) передаточных функций элементов.*

Передаточная функция замкнутого контура с обратной связью

Из рис. 1.13 видно, что

$$Y(s)=Y_1(s)=G_1(s)(X(s)\pm Y_2(s))=G_1(s)(X(s)\pm G_2(s)Y(s)),$$

поэтому

$$Y(s)=\frac{G_1(s)X(s)}{1\mp G_1(s)G_2(s)}.$$

Отсюда

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1\mp G_1(s)G_2(s)}. \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

Введение мультипликатора в контур обратной связи с динамической моделью Кейнса

Напомним, что динамическая модель Кейнса имеет вид[1]:

$$\frac{dy}{dt}+(1-c)y=\underline{C}+I, \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

где y — ВВП;
$\underline{C}$ — фиксированная часть фонда потребления;
I — инвестиции;
c — предельная склонность к потреблению ($0 < c < 1$);
$1 - c$ — предельная склонность к накоплению.

Разделив левую и правую части уравнения **(1.3.4)** на $(1 - c)$, получим:

$$T\frac{dy}{dt}+y=y_E, \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

где $T=\dfrac{1}{1-c}$ — постоянная времени инерционного звена, обратно пропорциональная склонности к накоплению;

$y_E=\dfrac{\underline{C}+I}{1-c}$ — установившееся значение ВВП для данного объема инвестиций I.

Рассмотрим поведение экономики в форме инерционного звена **(1.3.5)**, которая в начальный момент $t = 0$ находилась в состоянии равновесия $y(0)=y_E^0=\dfrac{\underline{C}+I_0}{1-c}$, после чего инвестиции увеличились с I_0 до $I = I_0 + \Delta I$ ($\Delta I > 0$). Тогда правую часть **(1.3.5)** можно представить в виде двух слагаемых:

$$y_E=\frac{\underline{C}+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{1-c}=y_E^0+x, \quad x=\frac{\Delta I}{1-c}.$$

В свою очередь, решение уравнения **(1.3.5)** можно разложить на две соответствующие части:

$$y(t)=y_E^0+\eta(t),$$

где $\eta(t)$ — переменная часть переходного процесса $y(t)$.

---

[1] Выходная переменная модели обозначена малой буквой y, поскольку большая буква Y предназначена для образа.

Переменная $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T\frac{d\eta}{dt}+\eta = x\chi(t), \quad \eta(0)=0\,. \tag{1.3.6}$$

Его решение было найдено в § 1.2:

$$\eta = x\left(1-e^{\frac{-t}{T}}\right),$$

т.е.

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t) = x = \frac{\Delta I}{1-c}\,.$$

Поэтому по завершении переходного процесса экономика действительно перейдет в состояние y_E:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_E^0 + x = \frac{c_0+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{1-c}=\frac{c_0+I}{1-c}=y_E\,.$$

Исследуем теперь, как изменится поведение экономики при ее включении в контур обратной связи с мультипликатором.

Контур обратной связи, образованный из модели Кейнса и мультипликатора с коэффициентом усиления $\alpha > 0$, показан на рис. 1.14. Если выход мультипликатора добавляется к входному воздействию, то имеет место положительная обратная связь, если вычитается — отрицательная.

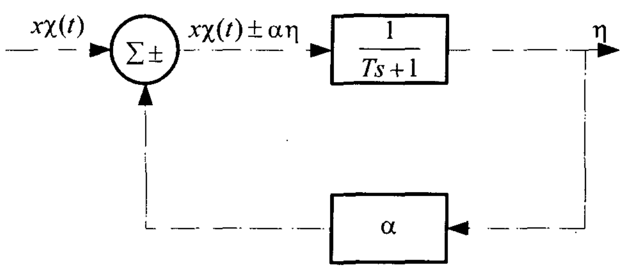

Рис. 1.14. Мультипликатор в контуре обратной связи с динамической моделью Кейнса

Используя выражение **(1.3.3)**, находим передаточную функция контура с обратной связью:

$$G(s)=\frac{G_1(s)}{1\mp G_1(s)G_2(s)}=\frac{\frac{1}{Ts+1}}{1\mp\frac{\alpha}{Ts+1}}=\frac{1}{Ts+1\mp\alpha}\,. \tag{1.3.7}$$

Знак «−» при α в знаменателе **(1.3.7)** соответствует положительной обратной связи, знак «+» — отрицательной обратной связи.

Поскольку образ входа

$$X(s) = x\int_0^\infty e^{-st}\chi(t)\,dt = \frac{x}{s},$$

то можно определить образ выхода с помощью передаточной функции

$$H(s) = G(s)X(s) = \frac{x}{s(Ts+1\mp\alpha)}.$$

По табл. 1.1 находим прообраз:

$$\eta(t) = \frac{x}{1\mp\alpha}\left[1 - e^{-\frac{(1\mp\alpha)t}{T}}\right], \quad \lim_{t\to\infty}\eta(t) = \frac{x}{1\mp\alpha}, \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

откуда

$$y(t) = y_E^0 + \eta(t) = \frac{C+I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{(1\mp\alpha)(1-c)}\left[1 - e^{-\frac{(1\mp\alpha)t}{T}}\right]. \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

Следует заметить, что те же самые результаты можно получить, погрузив мультипликатор внутрь модели Кейнса. В самом деле, из рис. 1.14 видно, что входом в инерционное звено служит $x\chi(t) \pm \alpha\eta$, т.е. сумма или разность входа в систему ($x\chi(t)$) и выхода из нее, пропущенного через мультипликатор ($\alpha\eta$). Поэтому приращение ВВП $\eta(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$T\frac{d\eta}{dt} + \eta = x\chi(t) \pm \alpha\eta, \quad \eta(0) = 0,$$

или

$$\frac{T}{1\mp\alpha}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \eta = \frac{x\chi(t)}{1\mp\alpha}, \quad \eta(0) = 0,$$

а решение данного уравнения как раз и имеет вид **(1.3.8)**.

После завершения переходного процесса решение **(1.3.9)** принимает вид (стационарное решение):

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \tilde{y}_E = \frac{C+I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{(1\mp\alpha)(1-c)}.$$

Значения ВВП, инвестиций и потребления в установившемся режиме при первоначальных инвестициях I_0, инвестициях $I = I_0 + \Delta I$, а также при введении положительной и отрицательной обратных связей приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2. ***Значения ВВП, инвестиций и потребления***

Показатель	*Начальное значение показателя*	*Установившееся значение показателя*		
		без введения обратной связи	*при положительной обратной связи*	*при отрицательной обратной связи*
ВВП	$\frac{\underline{C}+I_0}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+I_0+\Delta I}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+I_0+\Delta I/(1-\alpha)}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+I_0+\Delta I/(1+\alpha)}{1-c}$
Инвестиции	I_0	$I_0+\Delta I$	$I_0+\frac{\Delta I}{1-\alpha}$	$I_0+\frac{\Delta I}{1+\alpha}$
Потребление	$\frac{\underline{C}+cI_0}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+c(I_0+\Delta I)}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+c\left(I_0+\frac{\Delta I}{1-\alpha}\right)}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+c\left(I_0+\frac{\Delta I}{1+\alpha}\right)}{1-c}$

Таким образом, введение мультипликатора ($0 < \alpha < 1$) в контур положительной обратной связи с моделью Кейнса приводит к более высоким приростам ВВП, инвестиций и потребления, однако при этом переходный процесс имеет более длительный характер по сравнению с процессом при отсутствии обратной связи, поскольку при $0 < \alpha < 1$

$$\frac{T}{1-\alpha} > T.$$

Напротив, при введении отрицательной обратной связи приросты ВВП, инвестиций и потребления ниже, однако переходный процесс протекает быстрее, поскольку при $\alpha > 0$

$$\frac{T}{1+\alpha} < T.$$

Введение акселератора в контур положительной обратной связи с динамической моделью Кейнса

Исследуем теперь, как изменится поведение экономики в форме модели Кейнса (в приращениях) при ее включении в контур положительной обратной связи с акселератором. Этот контур показан на рис. 1.15 ($\eta(t)$ — приращение ВВП, т.е. $\eta(t) = y(t) - y_E^0$).

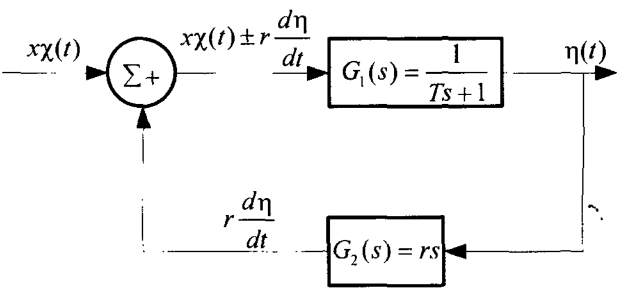

*Рис. 1.15. **Акселератор в контуре положительной обратной связи с динамической моделью Кейнса***

Используя выражения **(1.3.3)**, находим передаточную функцию указанного контура:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{\dfrac{1}{Ts+1}}{1 - \dfrac{rs}{Ts+1}} = \frac{1}{(T-r)s+1}. \qquad \textbf{(1.3.10)}$$

Поскольку образ входа

$$X(s)=x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\chi(t)\,dt=\frac{x}{s},$$

то с помощью передаточной функции контура определяем образ выхода:

$$H(s)=G(s)X(s)=\frac{x}{s\left[(T-r)s+1\right]}.$$

И, наконец, по табл. 1.1 находим прообраз

$$\eta(t)=x\left[1-e^{-\frac{t}{T-r}}\right],\quad \lim_{t\to\infty}\eta(t)=x. \qquad \textbf{(1.3.11)}$$

Итак, ВВП ведет себя следующим образом:

$$y(t)=y_E^0+\eta(t)=\frac{\underline{C}+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{1-c}\left[1-e^{-\frac{t}{T-r}}\right],$$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\frac{\underline{C}+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{1-c}. \qquad \textbf{(1.3.12)}$$

Таким образом, введение акселератора в контур обратной связи с динамической моделью Кейнса приводит к тому же значению ВВП в установившемся режиме, что и в отсутствие обратной связи. При этом сходимость к данному значению происходит быстрее, поскольку $T-r<T$. Однако ускорение сходимости достигается за счет сокращения потребления в начале переходного периода.

В самом деле, потребление в переходный период без введения акселератора имеет вид:

$$C(t)=\frac{\underline{C}+c(I_0+\Delta I)}{1-c}-\frac{\Delta I}{1-c}e^{-\frac{t}{T}},$$

а с введением акселератора —

$$\tilde{C}(t)=\frac{\underline{C}+c(I_0+\Delta I)}{1-c}-\frac{\Delta I e^{-\frac{t}{T-r}}}{1-c}\cdot\frac{r}{T-r}.$$

Поэтому действительно в начале переходного процесса (при $t<\tilde{t}$) имеет место сокращение потребления на величину

$$C(t)-\tilde{C}(t)=\frac{\Delta I}{1-c}\left(\frac{T}{T-r}e^{-\frac{t}{T-r}}-e^{-\frac{t}{T}}\right)=\frac{\Delta I}{1-c}\left(\frac{T}{T-r}e^{-\frac{rt}{T(T-r)}}-1\right),$$

а при $t>\tilde{t}$, напротив, потребление больше $\left(\tilde{t}=\frac{T(T-r)}{r}\ln\left(\frac{T}{T-r}\right)\right)$.

Графики потребления с введением и без введения акселератора показаны на рис. 1.16.

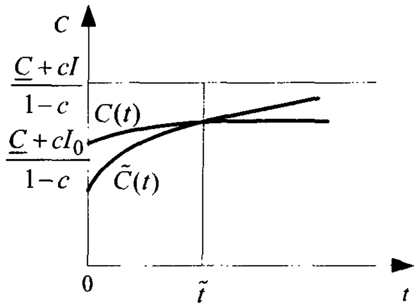

*Рис. 1.16. **Изменение потребления во времени***

Регулирование

Регулирование представляет собой процесс, в ходе которого регулируемый показатель y (выход) сравнивается с входом x.

При наличии отклонения регулируемый орган (регулятор) воздействует, быть может, на регулируемый объект посредством исполнительного органа.

Преимущество регулирования по сравнению с жестким управлением состоит в том, что не обязательно знать вид возмущающих воздействий на объект регулирования, поскольку регулирование осуществляется по отклонению. В этом же и его недостаток, так как регулирование начинается тогда, когда отклонение уже возникло, т.е. без упреждения, а следовательно, с запозданием.

Для регулирования характерно наличие контура обратной связи, как это показано на рис. 1.17.

Используя правила определения передаточных функций соединений, найдем образ выхода динамической системы, представленной на рис. 1.17 (передаточные функции элементов снабжены индексами этих элементов):

$$Y(s) = Z(s) + G_R(s)G_S(s)G_P(s)(X(s) - G_M(s)Y(s)),$$

откуда

$$Y(s) = \frac{Z(s) + G_R(s)G_S(s)G_P(s)X(s)}{1 + G_M(s)G_R(s)G_S(s)G_P(s)}. \qquad \textbf{(1.3.13)}$$

Требования к этой системе следующие: с одной стороны, она должна придерживаться на выходе входа $x(t)$, а с другой стороны — элиминировать возмущения $z(t)$.

Если $z(t) = 0$, т.е. возмущений нет, то $Z(s) = 0$, и из **(1.3.13)**

$$G(s)=\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{G_R(s)G_S(s)G_P(s)}{1+G_M(s)G_R(s)G_S(s)G_P(s)}. \qquad \textbf{(1.3.14)}$$

Следовательно, для отработки входа передаточную функцию регулятора $G_R(s)$ надо выбирать такой, чтобы $Y(s) \approx X(s)$, тем самым $G(s) \approx 1$, т.е. регулятор должен обладать большим усилением.

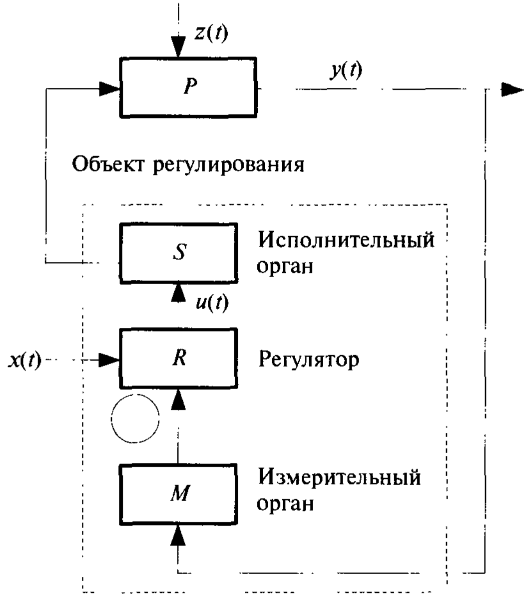

Рис. 1.17. ***Контур обратной связи, осуществляющий регулирование***

Если $x(t) = 0$, т.е. действуют только возмущения, то $X(s) = 0$, и из **(1.3.13)**

$$G(s)=\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{1}{1+G_M(s)G_R(s)G_S(s)G_P(s)}. \qquad \textbf{(1.3.15)}$$

Следовательно, необходимо так выбирать передаточную функцию регулятора, чтобы элиминировать возмущение, т.е. $G(s) \approx 0$, чего можно добиться также с помощью регулятора с большим усилением.

Однако выбор регулятора с большим усилением, как будет показано ниже, приводит к неустойчивости системы.

Устойчивость линейных динамических систем

Система называется ***устойчивой***, если ее реакция на импульсное воздействие затухает, т.е. импульсная характеристика $g(t)$ имеет нулевую асимптоту:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0. \qquad \textbf{(1.3.16)}$$

В конце § 1.2 была найдена импульсная характеристика инерционного звена $g(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$, которая затухает в бесконечности, поэтому инерционное звено устойчиво. Исходя из этого устойчива и экономика, описываемая динамической моделью Кейнса, поскольку эта модель в непрерывном времени — инерционное звено.

Устойчивость линейного динамического звена

Импульсная характеристика звена является решением следующего уравнения:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(i)} = \delta(t). \tag{1.3.17}$$

Найдем преобразование Лапласа от обеих частей уравнения **(1.3.17)**:

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right) Y(s) = 1.$$

Образ импульсной характеристики

$$L_g(s) = Y(s) = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j s^j}.$$

Характеристический многочлен $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j s^j$ имеет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (обозначения соответствуют характеристическому уравнению $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0$) и может быть разложен на следующие множители:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j s^j = a_n \sum_{j=1}^{n} (s-\lambda_j).$$

Если среди корней встречаются комплексные, то они взаимно сопряженные, например, $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$. В таком случае множители с парой таких корней можно представить в виде квадратного трехчлена:

$$(s - \alpha - i\omega)(s - \alpha + i\omega) = (s - \alpha)^2 + \omega^2.$$

Исходя из этого, образ импульсной характеристики линейного звена примет вид (сначала располагаем комплексные корни, затем — действительные):

$$\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j s^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j + \gamma_j s}{(s-\alpha_j)^2 + \omega_j^2} + \sum_{j=2k+1}^{n} \frac{\beta_j}{(s-\lambda_j)}, \tag{1.3.18}$$

где k — число пар взаимно сопряженных корней;

$(n - 2k)$ — число действительных корней;

β_j, γ_j — коэффициенты разложения **(1.3.18)**, которые определяются путем приведения правой части **(1.3.18)** к общему знаменателю, равному $\sum_{j=0}^{n} a_j s^j$.

Из разложения **(1.3.18)** вытекает следующий вид импульсной характеристики динамического звена как прообраза **(1.3.18)** (снова воспользуемся табл. 1.1):

$$g(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{\alpha_j t}(\beta_j \sin\omega_j t+\gamma_j \cos\omega_j t)+\sum_{j=2k+1}^{n} \beta_j e^{\lambda_j t}. \qquad \textbf{(1.3.19)}$$

Из **(1.3.19)** видно, что динамическое звено устойчиво, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=0,$$

если отрицательны действительные части комплексных корней $\alpha_j<0$, $j=1, ..., k$ и действительные корни $\lambda_j<0$, $j=2k+1, ..., n$.

Устойчивость и синергетика модели Самуэльсона–Хикса

Ниже в качестве примера детально исследуем условия устойчивости модели Самуэльсона–Хикса. Кроме того, покажем, что эта модель при определенных значениях параметров является синергетической, хотя и является линейной динамической системой второго порядка.

В работе [4] синергетические свойства экономики трактуются следующим образом: «...синергетическая экономика придает особое значение не линейным, а нелинейным аспектам экономического эволюционного процесса, не устойчивости, а неустойчивостям, не непрерывности, а разрывам, не постоянству, а структурным изменениям — в противоположность традиционному рассмотрению линейности, устойчивости, непрерывности и неизменности». К важнейшим аспектам экономического эволюционного процесса автор относит «...нелинейность, неустойчивость, бифуркации и хаос в динамических экономических системах».

Выше (см. **(1.2.18)**) было показано, что непрерывным аналогом модели Самуэльсона–Хикса является следующее линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$\frac{1}{1-c}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1-r}{1-c}\cdot\frac{dy}{dt}+y=\frac{\underline{C}+I}{1-c}. \qquad \textbf{(1.3.20)}$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений [11] общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного.

Общее решение однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$

$$A_1 e^{\lambda_1 t}+A_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \textbf{(1.3.21)}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\frac{1}{1-c}\lambda^2 + \frac{(1-r)}{1-c}\lambda + 1 = 0, \qquad \textbf{(1.3.22)}$$

которое получается при поиске решения однородного уравнения в виде $e^{\lambda t}$.

Поскольку частным решением неоднородного уравнения служит константа в правой части **(1.3.20)**, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\underline{C} + I}{1-c}.$$

Конкретное решение получаем при заданных начальных условиях.

Выбранное частное решение неоднородного уравнения является одновременно и его стационарным решением

$$y^E = \frac{\underline{C} + I}{1-c},$$

а точка $\left(y^E, 0\right)$ на плоскости (y, u) переменной y и ее производной $u = y'$ является точкой равновесия.

Исследуем поведение решения уравнения **(1.3.20)** в окрестности точки равновесия $\left(y^E, 0\right)$. Казалось бы, что при небольшом отклонении от этой точки, вызванном некоторым внешним импульсным воздействием $\delta(t)\begin{pmatrix}\eta_0 \\ u_0\end{pmatrix}$, система, попавшая в точку $\left(y^E + \eta_0, u_0\right)$, должна после завершения переходного процесса снова возвратиться в точку равновесия $\left(y^E, 0\right)$. Однако, как будет показано ниже, это далеко не всегда так.

Далее для определенности будем рассматривать случай $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$, как это показано на рис. 1.18, т.е. значение ВВП уменьшилось, а скорость его роста с нулевой в устойчивом состоянии поменялась на отрицательную.

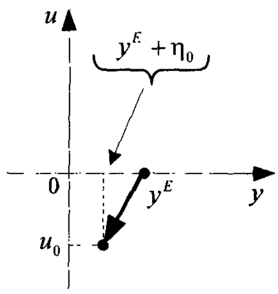

Рис. 1.18. Перевод системы из установившегося состояния $\left(y^E,\ 0\right)$ ***в неустойчивое состояние*** $\left(y^E + \eta_0, u_0\right)$

Представим решение уравнения **(1.3.20)** при начальных условиях $y(0) = y^E + \eta_0$, $y'(0) = u_0$ в следующем виде:

$$y = y^E + \eta,$$

тогда приращение ВВП относительно стационарного решения y^E будет удовлетворять однородному уравнению

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} + (1-r)\frac{d\eta}{dt} + 1 = 0, \ \eta(0) = \eta_0, \ \eta'(0) = u_0. \qquad \textbf{(1.3.23)}$$

Ниже кроме поведения ВВП будет также изучаться эволюция инвестиций и потребления. Согласно модели годовые инвестиции состоят из постоянной части I и переменной части $i = r\big(y(t) - y(t-1)\big)$. За время Δt переменная часть составит

$$\Delta i = r\big(y(t) - y(t - \Delta t)\big).$$

Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{di}{dt} = r\frac{dy}{dt} = r\frac{d\eta}{dt}.$$

Поскольку $i(0) = 0$, $\eta(0) = 0$, то

$$i = r\eta.$$

Тем самым текущее значение инвестиций

$$I(t) = I + i = I + r\eta(t), \qquad \textbf{(1.3.24)}$$

а текущее значение потребления как разность ВВП и инвестиций равно соответственно

$$C(t) = y^E - I + (1-r)\eta(t). \qquad \textbf{(1.3.25)}$$

Решение однородного уравнения **(1.3.23)** при заданных начальных условиях имеет вид **(1.3.21)**, где A_1, A_2 определяются из начальных условий. Характер решения зависит от типа корней характеристического уравнения **(1.3.21)**, а тип последних в свою очередь обусловливается значением параметров r, c. Вначале рассмотрим все возможные значения r при условии, что

$$1 - 2\sqrt{1-c} > 0, \quad \text{или} \quad c > \frac{3}{4}. \qquad \textbf{(1.3.26)}$$

Следует заметить, что исследование устойчивости уравнения **(1.3.20)** было схематически выполнено в [6]. В настоящей работе это исследование проводится в деталях, чтобы выявить случаи синергетического поведения системы.

П е р в ы й с л у ч а й: $0 < r < 1 - 2\sqrt{1-c}$.

В этом случае дискриминант характеристического уравнения положителен, а его корни λ_1, λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-r)^2}{4} - (1-c)}, \qquad \textbf{(1.3.27)}$$

действительны и отрицательны, поскольку больший корень λ_1 при $1-r > 2\sqrt{1-c}$ отрицателен.

Используя начальные условия **(1.3.23)**, находим

$$A_1 = \frac{u_0 - \lambda_2 \eta_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_2 = \frac{u_0 - \lambda_1 \eta_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Поэтому

$$\eta(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(u_0 - \lambda_2\eta_0)e^{\lambda_1 t} - (u_0 - \lambda_1\eta_0)e^{\lambda_2 t}\right].$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y^E, \qquad \lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{t\to\infty} \eta'(t) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(u_0 - \lambda_2\eta_0)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - (u_0 - \lambda_1\eta_0)\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right] = 0.$$

Таким образом, система по завершении апериодического переходного процесса возвращается в прежнее состояние покоя $\left(y^E,\ 0\right)$, т.е. является устойчивой.

В начале переходного процесса при $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$ ВВП, а следовательно, потребление и инвестиции, продолжают еще некоторое время убывать, затем начинается их монотонный рост, который заканчивается достижением их стационарных значений $y^E, y^E - I$, I соответственно.

Второй случай: $r = 1 - 2\sqrt{1-c}$.

В этом случае дискриминант равен нулю, и характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda_1 = -\frac{1-r}{2}$ кратности два, поэтому фундаментальными решениями однородного уравнения **(1.3.20)** являются $e^{\lambda_1 t}$ и $te^{\lambda_1 t}$.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\eta(t) = e^{\lambda_1 t}\left(A_1 + A_2 t\right).$$

Используя начальные условия **(1.3.23)**, находим

$$A_1 = \eta_0, \ \ A_2 = u_0 - \lambda_1 \eta_0,$$

поэтому

$$\eta(t) = e^{\lambda_1 t}\left[\eta_0 + (u_0 - \lambda_1 \eta_0)t\right].$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0, \ \ \lim_{t\to\infty} \eta'(t) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y^E, \ \ \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0,$$

т.е. система возвращается в прежнее состояние покоя и, следовательно, является устойчивой.

ВВП, потребление и инвестиции ведут себя на протяжении переходного процесса аналогично их поведению в первом случае.

Третий случай: $1 - 2\sqrt{1-c} < r < 1.$

В этом случае дискриминант характеристического уравнения отрицателен, поэтому его корни комплексные взаимно сопряженные:

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \ \lambda_2 = \alpha - i\omega,$$

где $\alpha = -\dfrac{1-r}{2} < 0, \quad \omega = \sqrt{1 - c - \dfrac{(1-r)^2}{4}} > 0.$

Используя начальные условия **(1.3.23)**, находим

$$A_1 = \frac{u_0 - (\alpha - i\omega)\eta_0}{2i\omega}, \quad A_2 = \frac{u_0 - (\alpha + i\omega)\eta_0}{2i\omega},$$

поэтому

$$\eta(t) = e^{\alpha t}\left(\eta_0 \cos\omega t + \frac{u_0 - \alpha\eta_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Поскольку $\alpha < 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \eta'(t) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y^E, \ \ \lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} \eta'(t) = 0.$$

Таким образом, система после затухающих гармонических колебаний возвращается в первоначальное состояние покоя, т.е. является устойчивой.

ВВП, потребление, инвестиции при $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$ вначале продолжают убывать, затем растут и достигают установившихся значений, после чего этот автоколебательный процесс продолжается с экспоненциально затухающей амплитудой вплоть до окончательного достижения этими показателями за бесконечный промежуток времени своих стационарных значений.

Четвертый случай: $r = 1$.

С содержательной точки зрения этот случай означает, что весь прирост ВВП за год целиком идет на инвестиции.

При $r = 1$ корни характеристического уравнения мнимые взаимно сопряженные:

$$\lambda_1 = i\omega,\ \lambda_2 = -i\omega,\ \omega = \sqrt{1-c}.$$

Используя начальные условия, находим

$$A_1 = \frac{u_0 + i\omega\eta_0}{2i\omega},\quad A_2 = -\frac{u_0 - i\omega\eta_0}{2i\omega},$$

поэтому

$$\eta(t) = \eta_0 \cos\omega t + \frac{u_0}{\omega}\sin\omega t = \rho\sin(\omega t + \varphi), \qquad \textbf{(1.3.28)}$$

$$u(t) = \eta'(t) = -\omega\eta_0 \sin\omega t + \frac{u_0}{\omega}\cos\omega t = \omega\rho\cos(\omega t + \varphi), \qquad \textbf{(1.3.29)}$$

где

$$\sin\varphi = \frac{\eta_0}{\sqrt{\eta_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}},\quad \rho = \sqrt{\eta_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}.$$

Таким образом, при $r = 1$ система будет находиться в незатухающих гармонических колебаниях, т.е. система неустойчива, поскольку не возвращается в первоначальное устойчивое состояние, а потому является синергетической.

На плоскости $(\eta,\ u)$ фазовых переменных траектория системы, заданная уравнениями **(1.3.28)**, **(1.3.29)**, будет выглядеть как эллипс в канонической форме (рис. 1.19):

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \rho$, $b = \omega\rho$.

ВВП будет колебаться в пределах $y^E \pm \rho$, потребление — оставаться постоянным и равным стационарному значению $y^E - I$, а инвестиции — находиться в незатухающих автоколебаниях согласно уравнению $I(t) = I + \eta(t)$.

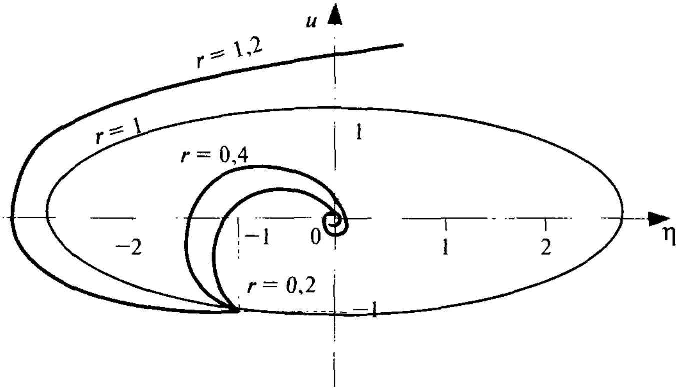

Рис. 1.19. ***Фазовые траектории системы при разных значениях коэффициента акселерации*** r $(c = 0{,}84,\ \eta_0 = -1,\ u_0 = -1)$

Пятый случай: $1 < r < 1 + 2\sqrt{1-c}$.

Это запредельный случай, поскольку на дополнительные инвестиции (сверх постоянного значения I) пойдет больше, чем прирост ВВП, и это превышение может осуществиться лишь за счет соответствующего сокращения потребления.

В этом случае дискриминант характеристического уравнения отрицателен, поэтому его корни комплексные взаимно сопряженные:

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i\omega,$$

$$\alpha = \frac{1-r}{2} > 0, \quad \omega = \sqrt{1 - c - \frac{(1-r)^2}{4}} > 0.$$

Следовательно,

$$\eta(t) = \rho e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \quad \rho = \sqrt{\eta_0^2 + \left(\frac{u_0 - \alpha\eta_0}{\omega}\right)^2}, \ \sin\varphi = \frac{\eta_0}{\rho},$$

т.е. система будет находиться в гармонических автоколебаниях с экспоненциально возрастающей амплитудой, иными словами, система неустойчивая, синергетическая.

Потребление и инвестиции также будут находиться в гармонических автоколебаниях с экспоненциально возрастающей амплитудой вокруг своих стационарных значений:

$$C(t) = y^E - I - (r-1)e^{\alpha t} \rho \sin(\omega t + \varphi),$$

$$I(t) = I + re^{\alpha t}\rho\sin(\omega t + \varphi).$$

На рис. 1.19 для всех рассмотренных случаев показаны траектории системы на плоскости фазовых переменных (η, u), $u = \eta'$.

Таким образом, экономика, описываемая моделью Самуэльсона—Хикса, устойчива при $0 < r < 1$ и обладает синергетическим свойством (неустойчива) при $r \geq 1$.

1.4. Линейные многосвязные динамические системы. Динамическая модель Леонтьева

Многосвязной называется такая динамическая ***система***, состояние которой задается не одной, а многими выходными (фазовыми) переменными $y_1, y_2, \ldots, y_n$, при этом все они взаимно связаны друг с другом.

Многосвязная система *линейна*, если производная любой фазовой переменной линейно зависит от фазовых переменных:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i + x_i(t), \quad y_i(0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

где $x_i(t)$ — входное воздействие на i-ю фазовую переменную.

Любая односвязная линейная система может быть представлена в форме линейной многосвязной системы. Например, линейный динамический элемент n-го порядка, заданный уравнением

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} b_i x^{(i)}, \qquad y^{(j)} = \frac{d^i y}{dt^j}, \qquad x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i},$$

представляется в форме следующей линейной многосвязной системы (относительно n фазовых переменных $y_0 = y$, $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}$):

$$\frac{dy_0}{dt} = y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

$$\ldots$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dt} = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} y_j + x_{n-1}(t),$$

где $x_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i x^{(i)}}{a_n}$.

В матричном виде система уравнений **(1.4.1)** может быть записана в следующем виде:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + x, \qquad y(0) = y^0, \tag{1.4.2}$$

где $\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}$, $A = \| a_{ij} \|$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$.

Поскольку рассматриваемые системы, задаваемые уравнениями **(1.4.1)** или **(1.4.2)**, линейны, то к их исследованию может быть применен математический аппарат, аналогичный использованному для односвязных линейных систем.

В частности, если применить преобразование Лапласа к обеим частям матричного уравнения **(1.4.2)**, то получим (напомним, что $L_{f'}(s) = -f(0) + sL_f(s)$):

$$sY(s) - y^0 = AY(s) + X(s).$$

Если начальные условия нулевые, т.е. $y^0 = 0$, то

$$(sE - A)Y(s) = X(s), \tag{1.4.3}$$

откуда

$$Y(s) = (sE - A)^{-1} X(s) = G(s)X(s),$$

или в развернутом виде:

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(s)X_j(s),$$

где $G(s) = (sE - A)^{-1}$ — передаточная функция (в форме матрицы) многосвязной системы.

Таким образом, найдя преобразование Лапласа от всех компонент входного вектора $x(t)$, умножаем их затем на элементы i-й строки передаточной матрицы и складываем произведения, что дает в итоге образ i-й фазовой переменной. Осталось прибегнуть к таблице преобразований Лапласа, чтобы получить прообраз $y_i(t)$, т.е. траекторию любой i-й фазовой переменной, а в итоге и всю траекторию системы $y(t)$ при заданном входном воздействии $x(t)$.

В передаточной матрице $G(s)$ внедиагональные элементы $G_{ij}(s)$ выражают перекрестные влияния фазовых переменных друг на друга. Если бы все внедиагональные элементы были равны нулю (т.е. $G_{ij}(s) = 0$, $i \neq j$), то имело бы смысл изучать порознь n односвязных линейных систем с передаточными функциями $G_{11}(s)$, ..., $G_{nn}(s)$.

При переходе к многосвязным линейным системам все приемы анализа и синтеза систем, примененные для односвязных линейных систем, остаются в силе.

Многосвязная линейная система, как и односвязная, устойчива, если ее реакция на импульсное воздействие в форме функции Дирака затухает.

Импульсное воздействие на систему выводит ее из состояния покоя, после чего система (в случае устойчивости) должна возвратиться в состояние покоя. Исследование устойчивости сводится к исследованию поведения системы однородных дифференциальных уравнений при ненулевых начальных условиях (результат импульсного воздействия):

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad y(0) = y^0. \tag{1.4.4}$$

Согласно Приложению 1, общее решение однородного уравнения **(1.4.4)** имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} l_i, \tag{1.4.5}$$

где C_i, $i = 1, ..., n$ — общие константы решения, которые для конкретного решения определяются на основе n начальных условий $y_i(0) = y_i^0$, $i = 1, ..., n$;

λ_i, $i = 1, ..., n$ — корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{1.4.6}$$

l_i, $i = 1, ..., n$, — нормированные собственные векторы матрицы A, соответствующие ее собственным числам (корням характеристического уравнения), т.е. каждый вектор l_i является решением системы $Al_i = \lambda_i l_i$.

Следует заметить, что форма общего решения **(1.4.5)** имеет силу для разных характеристических корней. Если же некоторые из них кратные, то надо внести изменения, указанные в Приложении 1.

Как видно из **(1.4.5)**, достаточным условием устойчивости линейной многосвязной системы является отрицательность действительных характеристических корней.

Экономика в форме динамического межотраслевого баланса как многосвязная линейная динамическая система

Статический межотраслевой баланс Леонтьева получается приравниванием чистых выпусков отраслей конечному спросу на продукцию отраслей[1]:

---

[1] Обозначения использованы такие, какие сложились в этой сфере экономической науки.

$$x - Ax = y, \qquad (1.4.7)$$

где $(n \times 1)$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец годовых валовых выпусков отраслей;

$(n \times 1)$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец годового конечного спроса на продукцию отраслей;

$(n \times n)$ $A = \| a_{ij} \|$ — матрица прямых затрат, каждый элемент которой a_{ij} показывает, сколько единиц продукта i необходимо для производства единицы j-го продукта. При этом предполагается, что a_{ij} не зависят от времени и масштаба производства.

Если теперь вектор конечных продуктов y_t в каждый год t представить в виде двух векторов: инвестиционных товаров (продуктов) и потребительских товаров, то получим *модель динамического межотраслевого баланса*:

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t, \quad t = 1, 2, \dots \qquad (1.4.8)$$

где $(n \times n)$ B — матрица приростных фондоемкостей, каждый элемент которой b_{ij} показывает, сколько единиц продукта i необходимо произвести для увеличения годового производства j-го продукта на единицу;

c_t — вектор-столбец конечного (непроизводственного) потребления.

С экономической точки зрения соотношение **(1.4.8)** показывает разделение вектора валовых выпусков (а следовательно, и каждый его компоненты) на т р и части:

1) Ax_t — текущее производственное потребление, включая амортизацию;
2) $B(x_{t+1} - x_t)$ — капитальные затраты на расширение производства;
3) c_t — конечное (непроизводственное) потребление.

Модель **(1.4.7)** с дискретным временем можно преобразовать в модель с непрерывным временем следующим образом:

$$B(x_{t+1} - x_t) = (E - A)x_t - c_t,$$

$$B(x(t + \Delta t) - x(t)) = \left[(E - A)x(t) - c(t)\right]\Delta t,$$

$$B\frac{dx}{dt} = (E - A)x - c(t). \qquad (1.4.9)$$

Если обратная матрица B^{-1} существует, то модель **(1.4.9)** может быть приведена к виду:

$$\frac{dx}{dt} = B^{-1}(E-A)x - B^{-1}c(t), \qquad x(0) = x^0, \qquad \textbf{(1.4.10)}$$

т.е. к форме линейной многосвязной системы, входом в которую служит вектор конечного производственного потребления $c(t)$, а выходом — вектор валовых выпусков $x(t)$.

Таким образом, для устойчивости экономики в форме динамического межотраслевого баланса достаточно (см. **(1.4.6)**), чтобы корни характеристического уравнения

$$|B^{-1}(E-A) - \lambda E| = 0 \qquad \textbf{(1.4.11)}$$

имели отрицательные действительные части.

Например, при $n = 1$ соотношение **(1.4.11)** принимает вид:

$$\frac{1-a}{b} - \lambda = 0,$$

где a — доля промежуточного продукта в валовом выпуске;

b — приростная фондоемкость валового выпуска,

поэтому $\lambda = \frac{1-a}{b} > 0$, т.е. экономика неустойчива и может, вообще говоря, неограниченно наращивать валовой выпуск.

Подобная картина имеет место и при $n > 1$, поэтому в модели баланса обязательно присутствуют ограничивающие факторы, которые действуют в реальной экономике. Это прежде всего ограниченные трудовые ресурсы. Если известна траектория трудовых ресурсов $L(t)$, то текущий выпуск ограничен:

$$lx(t) \le L(t),$$

где $l = (l_1, ..., l_n)$ — вектор-строка отраслевых трудоемкостей.

Кроме того, другим ограничивающим фактором являются природные ресурсы, добыча и вовлечение которых в производственный оборот по мере исчерпания наиболее экономически эффективной их части становятся все более затруднительными и менее эффективными.

1.5. Нелинейные динамические системы

Нелинейной называется ***система***, имеющая в своем составе хотя бы один нелинейный элемент.

Метод анализа нелинейной системы зависит от вида нелинейности. Существует два основных подхода к анализу нелинейных систем:

1) линеаризация системы (если это возможно) и последующее использование описанных выше методов исследования линейных динамических систем;

2) если линеаризация невозможна, то прямое решение нелинейных уравнений динамической системы (быть может, аналитическое решение, но, как правило, численное интегрирование на ЭВМ).

Рассмотрим уравнение нелинейного динамического элемента

$$F(y, y', ..., y^{(n)}, x, x', ..., x^{(m)}) = 0. \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

Данное уравнение целесообразно разрешить (если это возможно) относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)},\ x, x', ..., x^{(m)}), \qquad \textbf{(1.5.2)}$$

а затем перейти к системе дифференциальных уравнений относительно переменных $y_1, ..., y_n$:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = 1,\ y_{i+1} = y^{(i)},\ i = 1, ..., n-1, \\ & \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ & \ldots \\ & \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n, \\ & \frac{dy_n}{dt} = f(y_1, ..., y_n,' x, x', ..., x^{(m)}). \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.5.3)}$$

Далее необходимо получить аналитическое или численное решение уравнения **(1.5.2)** либо системы уравнений **(1.5.3)**.

Система уравнений **(1.5.3)** является частным случаем общей системы нелинейных уравнений (вход и его производные можно считать известными функциями времени), которая может служить описанием любой динамической нелинейной многосвязной системы

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, ..., y_n, t), \quad i = 1, ..., n. \qquad \textbf{(1.5.4)}$$

Рассмотрим вначале линеаризацию нелинейной односвязной системы (нелинейной динамической модели Кейнса), а затем линеаризацию нелинейной двухсвязной системы (модель делового цикла Кейнса), а также прямое решение нелинейного уравнения (нелинейная односвязная система — модель Солоу).

Нелинейная динамическая модель Кейнса

Метод линеаризации рассмотрим на примере нелинейной модели Кейнса как нелинейного динамического звена первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, I), \qquad \textbf{(1.5.5)}$$

т.е. скорость роста ВВП является функцией ВВП и инвестиций. В линейном случае $f(y, I) = \underline{C} - (1-c)y + I$.

Поскольку $y (y > 0)$ — ВВП, а $x = I (I > 0)$ — инвестиции, то из экономических соображений следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial I} > 0, \tag{1.5.6}$$

т.е. с увеличением ВВП скорость его роста замедляется, а с увеличением инвестиций — возрастает.

Пусть при $t = 0$ инвестиции были равны I_0 и система находилась в некотором равновесном состоянии (y_0, I_0), первая компонента которого определяется из уравнения (инвестиции I_0 считаются известными)

$$f(y_0, I_0) = 0.$$

При увеличении инвестиций с I_0 до $I = I_0 + \Delta I$ $(\Delta I > 0)$ система будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y, I), \qquad y(0) = y_0.$$

Представим ВВП в виде суммы постоянной и переменной частей:

$$y(t) = y_0 + \eta(t), \qquad \eta(t) > 0, \quad \eta(0) = 0.$$

Переменная часть $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\eta}{dt} = f(y_0 + \eta, \quad I_0 + \Delta I), \qquad \eta(0) = 0. \tag{1.5.7}$$

Если приращение инвестиций ΔI сравнительно мало́, то при эволюторном характере функции $f(y, I)$ переменная часть $\eta(t)$ также сравнительно мала. Поэтому правую часть **(1.5.7)** можно разложить в окрестности точки (y_0, I_0) в ряд Тейлора, отбросив члены второго и более высоких порядков:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, I_0)\eta + \frac{\partial f}{\partial I}(y_0, I_0) \cdot \Delta I, \quad \eta(0) = 0.$$

После перенесения члена, содержащего η, в левую часть и деления обеих частей на $-\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, I_0)$ получаем уравнение инерционного звена:

$$T\frac{d\eta}{dt} + \eta = \alpha \Delta I, \qquad \eta(0) = 0, \tag{1.5.8}$$

где $\frac{1}{T} = -\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, I_0)$ — обобщенная предельная склонность к сбережению в начальном состоянии;

$$\alpha = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial I}(y_0, I_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(y_0, I_0)} > 0.$$

Из **(1.5.8)** вытекает, что переменная часть ВВП будет вести себя следующим образом:

$$\eta(t) = \alpha\Delta I(1 - e^{-\frac{t}{T}}),$$

а ВВП в целом будет изменяться как функция

$$y(t) = y_0 + \alpha\Delta I(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

При этом новое равновесное состояние ВВП

$$y_E = \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 + \alpha\Delta I = y_0 - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial I}(y_0, I_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(y_0, I_0)}\Delta I.$$

Учет сбережений населения в упрощенной модели Кейнса

Выше нами была рассмотрена процедура линеаризации нелинейной односвязной системы. Рассмотрим теперь линеаризацию нелинейной двухсвязной системы.

Для описания модели, как и ранее, введем следующие обозначения:

y	— валовой внутренний продукт (ВВП);
r	— процентная ставка на деньги (норма прибыли на деньги);
$I_D(y, r)$, $M(y, r)$	— функции спроса на инвестиции и деньги;
$S(y, r)$	— функция сбережений населения;
M_S	— предложение денег (фиксированная величина).

Спрос на инвестиции растет с ростом ВВП, т.е. $\dfrac{\partial I_D}{\partial y} > 0$, но падает с ростом процентной ставки $\left(\dfrac{\partial I_D}{\partial r} < 0\right)$. Напротив, сбережения населения растут и при росте ВВП, и при росте процентной ставки, т.е. $\dfrac{\partial S}{\partial y} > 0$, $\dfrac{\partial S}{\partial r} > 0$.

Спрос на деньги растет с ростом ВВП (денег должно быть столько, чтобы их с учетом оборота хватило для покупки произведенного ВВП), но падает с ростом нормы процента, т.е. $\dfrac{\partial M}{\partial y} > 0$, $\dfrac{\partial M}{\partial r} < 0$.

Тогда модель делового цикла Кейнса можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \alpha I(y,r), \\ \frac{dr}{dt} &= \beta(M(y,r) - M_S), \end{aligned}\right\} \tag{1.5.9}$$

где $I(y,r) = I_D(y,r) - S(y,r)$ — реальные инвестиции, $\dfrac{\partial I}{\partial r} < 0$;

α — коэффициент реакции ВВП на увеличение реальных инвестиций $\alpha > 0$;

β — коэффициент реакции процентной ставки на дефицит денег, $\beta > 0$.

Система **(1.5.9)** имеет естественную точку равновесия, определяемую как решение системы двух нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} I_D(y,r) &= S(y,r), \\ M(y,r) &= M_S. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.10}$$

Обозначим через y_0, r_0 решение системы **(1.5.10)** и исследуем поведение динамической системы **(1.5.9)** в окрестности точки равновесия y_0, r_0.

Введем новые переменные u_1, u_2 как приращения старых относительно координат точки равновесия:

$$u_1 = y - y_0, \quad u_2 = r - r_0.$$

Тогда в окрестности нулевой точки система **(1.5.9)** запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \alpha\frac{\partial I}{\partial y}u_1 + \alpha\frac{\partial I}{\partial r}u_2 + o(u), \\ \frac{du_2}{dt} &= \beta\frac{\partial M}{\partial y}u_1 + \beta\frac{\partial M}{\partial r}u_2 + o(u), \end{aligned}\right\} \tag{1.5.11}$$

где $\quad \dfrac{\partial I}{\partial y} = \left.\dfrac{\partial I}{\partial y}\right|_{y = y_0,\ r = r_0}, \qquad \dfrac{\partial I}{\partial r} = \left.\dfrac{\partial I}{\partial r}\right|_{y = y_0,\ r = r_0},$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \left.\dfrac{\partial M}{\partial y}\right|_{y = y_0,\ r = r_0}, \qquad \dfrac{\partial M}{\partial r} = \left.\dfrac{\partial M}{\partial r}\right|_{y = y_0,\ r = r_0},$

где $o(u)$ — члены более высокого порядка малости, чем u_1, u_2.

Система **(1.5.11)** — это линейная двухсвязная система с точностью до членов $o(u)$. Как описано в § 1.4, будем искать ее решение в виде

$$u_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad u_2 = A_2 e^{\lambda t}. \tag{1.5.12}$$

После подстановки выражений **(1.5.12)** в систему **(1.5.11)** получим с точностью до $o(u)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda u_1 &= \alpha \frac{\partial I}{\partial y} u_1 + \alpha \frac{\partial I}{\partial r} u_2, \\ \lambda u_2 &= \beta \frac{\partial M}{\partial y} u_1 + \beta \frac{\partial M}{\partial r} u_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.13}$$

Для того чтобы линейная система двух однородных алгебраических уравнений относительно u_1, u_2 имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha \frac{\partial I}{\partial y} - \lambda & \alpha \frac{\partial I}{\partial r} \\ \beta \frac{\partial M}{\partial y} & \beta \frac{\partial M}{\partial r} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, получим характеристическое уравнение линеаризованной двухсвязной системы:

$$\lambda^2 - \lambda \left(\alpha \frac{\partial I}{\partial y} + \beta \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \alpha\beta \left(\frac{\partial I}{\partial y} \cdot \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} \right) = 0, \tag{1.5.14}$$

которое имеет следующее решение:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \frac{\partial I}{\partial y} + \beta \frac{\partial M}{\partial r}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\alpha \frac{\partial I}{\partial y} + \beta \frac{\partial M}{\partial r} \right)^2}{4} - \alpha\beta \left(\frac{\partial I}{\partial y} \cdot \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} \right)}.$$

Чисто математическую сторону исследования в соответствии с § 1.4 выполним при следующих типовых обозначениях:

$$a_{11} = \alpha \frac{\partial I}{\partial y}, \quad a_{12} = \alpha \frac{\partial I}{\partial r},$$

$$a_{21} = \beta \frac{\partial M}{\partial y}, \quad a_{22} = \beta \frac{\partial M}{\partial r},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом введенных типовых обозначений и при отбрасывании членов $o(u)$ система из двух линейных однородных дифференциальных уравнений **(1.5.11)** запишется следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(o) = u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix}, \tag{1.5.15}$$

где u^0 — состояние системы в начальный момент времени.

Применив преобразование Лапласа с параметром s к обеим частям уравнения **(1.5.15)**, получим

$$sU(s) - u^0 = AU(s),$$

где $U(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} u(t)dt.$

Отсюда

$$U(s) = \left(sE_2 - A\right)^{-1} u^0, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5.16}$$

Находим по правилу обращения матрицы

$$\left(sE_2 - A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s - a_{22}}{\Delta} & \dfrac{a_{12}}{\Delta} \\ \dfrac{a_{21}}{\Delta} & \dfrac{s - a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{1.5.17}$$

$$\Delta(s) = \det\left(sE_2 - A\right) = \left(s - a_{11}\right)\left(s - a_{22}\right) - a_{12}a_{21} =$$
$$= s^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.5.18}$$

Подставив выражение для обратной матрицы в **(1.5.16)**, получаем

$$U(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} u^0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} U_1(s) &= \frac{\left(s - a_{22}\right)u_1^0 + a_{12}u_2^0}{\Delta(s)}, \\ U_2(s) &= \frac{a_{21}u_1^0 + \left(s - a_{11}\right)u_2^0}{\Delta(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.19}$$

Выражения **(1.5.19)** — это образ решения системы **(1.5.15)** при начальных условиях $u(0) = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} = u^0$. Само решение — это реакция линейной двухсвязной системы **(1.5.15)** на импульсное воздействие $u^0\delta(t)$ в начальный момент времени ($\delta(t)$ — дельта-функция). Если система устойчива, то после завершения переходного процесса она должна возвратиться в первоначальное нулевое ($u_1 = 0,\quad u_2 = 0$) состояние покоя. Если же система неустойчива, то она не вернется в первоначальное нулевое состояние.

Поведение системы, как это видно из полученного образа решения **(1.5.19)**, зависит от корней характеристического многочлена, поскольку $\Delta(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2),\quad \Delta(\lambda_1) = 0,\quad \Delta(\lambda_2) = 0.$

Далее рассмотрим т р и возможных случая:

1) корни мнимые: $\lambda_1 = i\omega,\quad \lambda_2 = -i\omega,\quad \Delta(s) = s^2 + \omega^2$;

2) корни комплексные: $\lambda_1 = a + i\omega,\ \lambda_2 = a - i\omega,\ \Delta(s) = (s-a)^2 + \omega^2$;

3) корни действительные: $\lambda_1, \lambda_2,\quad \Delta(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)$.

Корни мнимые. Деловой цикл Кейнса. Если

$$a_{11} + a_{22} = \alpha\frac{\partial I}{\partial y} + \beta\frac{\partial M}{\partial r} = 0, \tag{1.5.20}$$

$$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = \alpha\beta\left(\frac{\partial I}{\partial r}\cdot\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial M}{\partial r}\right) < 0, \tag{1.5.21}$$

то

$$\lambda_1 = i\omega,\quad \lambda_2 = -i\omega,$$

где $\omega = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \sqrt{\alpha\beta\left(\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}\right)}.$

Поэтому в этом случае $\Delta(s) = (s - i\omega)(s + i\omega) = s^2 + \omega^2$.

Поскольку согласно табл. 1.1 прообразом $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ является $\cos\omega t$, а прообразом $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ — $\sin\omega t$, то окончательно получаем:

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= u_1^0\cos\omega t + \frac{-a_{22}u_1^0 + a_{12}u_2^0}{\omega}\sin\omega t,\\ u_2(t) &= u_2^0\cos\omega t + \frac{a_{21}u_1^0 - a_{11}u_2^0}{\omega}\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.22}$$

Таким образом, система будет описывать замкнутый цикл, начиная с точки u^0, проходя через точку $(-u^0)$ и возвращаясь через $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ снова в точку u^0. Этот замкнутый цикл показан на рис. 1.20.

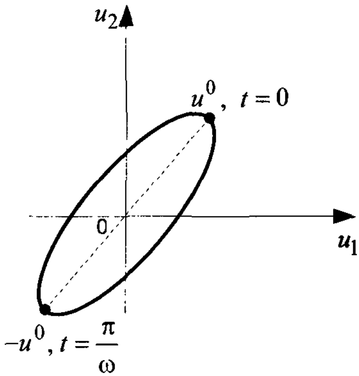

Рис. 1.20. ***Деловой цикл Кейнса***

Вернемся к экономической интерпретации условий возникновения делового цикла Кейнса. Прежде всего рассмотрим условие **(1.5.20)**, записав его в виде

$$\alpha \frac{\partial I}{\partial y} = \beta\left(-\frac{\partial M}{\partial r}\right).$$

Поскольку $\dfrac{\partial M}{\partial r} < 0$, то из этого условия вытекает, что $\dfrac{\partial I}{\partial y} > 0$, т.е. скорость роста (по ВВП) спроса на инвестиции должна быть больше соответствующей скорости сбережений, кроме того, должно выполняться равенство

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left|\dfrac{\partial M}{\partial r}\right|}{\dfrac{\partial I}{\partial y}}.$$

Условие отрицательности дискриминанта

$$\frac{\partial I}{\partial y} \cdot \left|\frac{\partial M}{\partial r}\right| > \left|\frac{\partial I}{\partial r}\right| \cdot \frac{\partial M}{\partial y}$$

выполняется, по крайней мере, тогда, когда

$$\frac{\partial I}{\partial y} > \frac{\partial M}{\partial r}, \quad \left|\frac{\partial M}{\partial r}\right| > \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|,$$

т.е. скорость роста (по ВВП) реальных инвестиций выше скорости роста спроса на деньги, а скорость падения (по норме процента) спроса на деньги выше скорости падения реальных инвестиций.

Корни комплексные. Если дискриминант характеристического уравнения **(1.5.14)** отрицателен, то корни уравнения комплексные взаимно сопряженные:

$$\lambda_{1,2} = a \pm i\omega,$$

где $a = \dfrac{\alpha \dfrac{\partial I}{\partial y} + \beta \dfrac{\partial M}{\partial r}}{2}$.

$$\omega = \sqrt{\alpha\beta\left(\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \frac{\left(\alpha\dfrac{\partial I}{\partial y} + \beta\dfrac{\partial M}{\partial r}\right)^2}{y}}.$$

При этом

$$\Delta(s) = (s - a - i\omega)(s - a + i\omega) = (s - a)^2 + \omega^2.$$

В этом случае поведение системы зависит от знака действительной части корней:

- если знак положителен, то имеют место автоколебания с экспоненциально возрастающей амплитудой, и система удаляется от точки равновесия;
- если знак отрицателен, то имеют место автоколебания с экспоненциально убывающей амплитудой, и система возвращается в точку равновесия.

Докажем это. Образ решения будет иметь вид:

$$U(s) = \frac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}\begin{pmatrix} s - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} u^0,$$

поэтому образы переменных u_1, u_2 соответственно равны

$$U_1(s) = \frac{(s - a_{22})u_1^0 + a_{12}u_2^0}{(s-a)^2 + \omega^2}, \quad U_2(s) = \frac{a_{21}u_1^0 + (s - a_{11})u_2^0}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

Поскольку согласно табл. 1.1 прообразом $\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$ является $e^{at}\cos\omega t$, а прообразом $\dfrac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$ — $e^{at}\sin\omega t$, то окончательно получаем

$$u_1(t) = e^{at}\left[u_1^0 \cos\omega t + \frac{(a-a_{22})u_1^0 + a_{12}u_2^0}{\omega}\sin\omega t\right], \qquad (1.5.23)$$

$$u_2(t) = e^{at}\left[u_2^0 \cos\omega t + \frac{a_{21}u_1^0 + (a-a_{11})u_2^0}{\omega}\sin\omega t\right].$$

Члены в квадратных скобках задают автоколебания, а множитель e^{at} определяет экспоненциальное изменение амплитуды: при $a > 0$ — ее неограниченное увеличение, при $a < 0$ — ее уменьшение до нуля. Поведение системы в том и другом случаях показано на рис. 1.21 (пунктиром показан разделительный цикл).

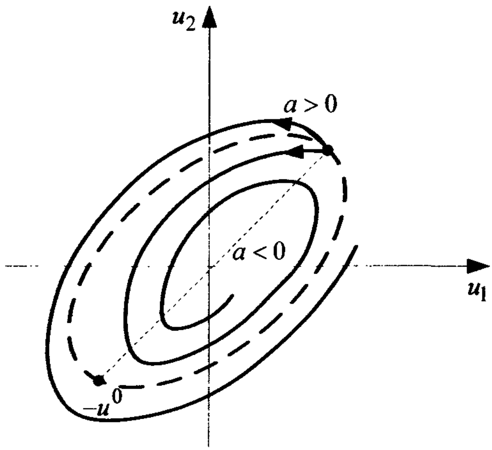

Рис. 1.21. ***Фазовые траектории системы при комплексных корнях характеристического уравнения***

Вернемся к содержательной интерпретации условий возникновения рассматриваемой ситуации. Основное условие — отрицательность дискриминанта, что эквивалентно неравенству

$$\alpha\beta\left(\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}\right) > \frac{\left(\alpha\dfrac{\partial I}{\partial y} + \beta\dfrac{\partial M}{\partial r}\right)^2}{4}. \qquad (1.5.24)$$

Необходимым условием выполнения **(1.5.24)** является положительность левой части данного неравенства:

$$\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\cdot\frac{\partial M}{\partial y} > 0,$$

или

$$\left|\frac{\partial I}{\partial r}\right| \cdot \frac{\partial M}{\partial y} > \left|\frac{\partial M}{\partial r}\right| \cdot \frac{\partial I}{\partial y}.$$

Последнее неравенство выполняется, по крайней мере, в том случае, когда

$$\frac{\partial M}{\partial y} > \frac{\partial I}{\partial y}, \quad \left|\frac{\partial I}{\partial r}\right| > \left|\frac{\partial M}{\partial r}\right|,$$

т.е. спрос на деньги растет (по y) быстрее, чем реальные инвестиции, а реальные инвестиции падают (по r) быстрее, чем спрос на деньги.

Если дискриминант отрицателен, то поведение системы целиком определяется знаком действительности части корней

$$a = \alpha \frac{\partial I}{\partial y} + \beta \frac{\partial M}{\partial r}.$$

При $\frac{\partial I}{\partial y} < 0$, т.е. когда спрос на инвестиции растет (по y) быстрее сбережений населения, то $a < 0$, поскольку $\frac{\partial M}{\partial r} < 0$.

Действительная часть корней останется отрицательной, если

$$\alpha \frac{\partial I}{\partial y} < \beta \left(-\frac{\partial M}{\partial r} \right).$$

В этом случае система в результате затухающих колебаний вернется в первоначальное состояние равновесия (y_0, r_0).

Корни действительные. Если дискриминант характеристического уравнения положителен, то оба корня действительны, поэтому $\Delta(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$, $\lambda_1 > \lambda_2$ и $\Delta^{-1}(s)$ можно разложить на простые дроби:

$$\frac{1}{\Delta(s)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right).$$

Образ решения примет вид:

$$U(s) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right) \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} u^0.$$

Отдельные его компоненты

$$U_1(s) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right) \left[(s - a_{22}) u_1^0 + a_{12} u_2^0 \right],$$

$$U_2(s) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right) \left[a_{21} u_1^0 + (s - a_{11}) u_2^0 \right].$$

Поскольку согласно табл. 1.1 прообразом $\frac{1}{s-a}$ служит e^{at}, а прообразом $\frac{s}{s-a}$ — $\left(\delta(t)+ae^{at}\right)$, то получаем

$$u_1(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\left(\lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right)u_1^0+\left(-a_{22}u_1^0+a_{12}u_2^0\right)\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)\right], \quad \textbf{(1.5.25)}$$

$$u_2(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\left(\lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right)u_2^0+\left(a_{21}u_1^0-a_{11}u_2^0\right)\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)\right].$$

Как видно из полученного решения, при $\lambda_1<0,\ \lambda_2<0$

$$\lim_{t\to\infty} u_i(t)=0, \quad i=1,2.$$

Напротив, если хотя бы один из корней положителен, то имеет место неограниченное возрастание (убывание) $u_i(t)$ при $u_i^0>0\left(u_i^0<0\right)$, $i=1,2$.

Если же $\lambda_1=0$, то система после экспоненциально затухающего переходного процесса перейдет в новое установившееся состояние

$$u_1^E=\frac{-a_{22}u_1^0+a_{12}u_2^0}{\lambda_2},$$

$$u_2^E=\frac{a_{21}u_1^0-a_{11}u_2^0}{\lambda_2}.$$

Поведение системы при $\lambda_1<0,\ \lambda_1=0$ и $\lambda_1>0$ показано на рис. 1.22.

Снова вернемся к содержательной интерпретации условий возникновения рассматриваемой ситуации. Основное условие — положительность дискриминанта, т.е. выполнение неравенства

$$\alpha\beta\left(\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial M}{\partial r}-\frac{\partial I}{\partial r}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}\right)<\frac{\left(\alpha\frac{\partial I}{\partial y}+\beta\frac{\partial M}{\partial r}\right)^2}{4}.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему (в круглые скобки взяты заведомо положительные величины):

$$\left(-\alpha\frac{\partial I}{\partial r}\right)\left(\beta\frac{\partial M}{\partial y}\right)<\frac{\left[\alpha\frac{\partial I}{\partial y}+\beta\frac{\partial M}{\partial r}\right]^2}{4}. \quad \textbf{(1.5.26)}$$

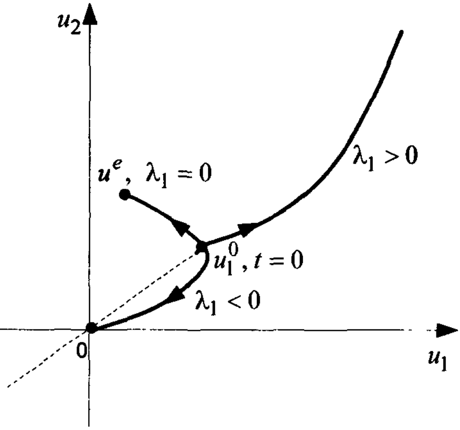

Рис. 1.22. ***Фазовые траектории системы при действительных корнях характеристического уравнения***

Неравенство **(1.5.26)** будет выполняться, по крайней мере, в том случае, когда

$$\frac{\partial I}{\partial y} > 0, \quad \left(-\alpha\frac{\partial I}{\partial r}\right) \le \left(-\beta\frac{\partial M}{\partial y}\right), \quad \beta\frac{\partial M}{\partial y} \le \alpha\frac{\partial I}{\partial y}, \qquad \textbf{(1.5.27)}$$

что возможно.

Корень λ_1 отрицателен, по крайней мере, тогда, когда производная $\dfrac{\partial I}{\partial y}$ становится пренебрежимо малой, но оставаясь положительной. Отрицательность λ_1 следует при этом из неравенства (в круглых скобках заведомо положительные величины):

$$\frac{\left(-\beta\dfrac{\partial M}{\partial r}\right)}{2} > \sqrt{\frac{\left(\beta\dfrac{\partial M}{\partial r}\right)^2}{4} - \left(-\alpha\frac{\partial I}{\partial r}\right)\left(\beta\frac{\partial M}{\partial y}\right)}.$$

Выводы. Подведем итоги. Нелинейная динамическая система **(1.5.9)** имеет точку равновесия y_0, r_0, являющуюся решением системы из двух нелинейных алгебраических уравнений:

$$I_D(y,r) - S(y,r) = 0,$$
$$M(y,r) - M_S = 0.$$

В результате некоторого импульсного воздействия система была «выбита» из состояния равновесия y_0, r_0 в некоторое другое состояние $y = y_0 + u_1^0$, $r = r_0 + u_2^0$, находящееся в окрестности равновесного состояния.

Для изучения дальнейшего поведения системы (1.5.9) она была линеаризована, т.е. заменена приближенно линейным аналогом (1.5.15) — линейной двухсвязной системой, в которой

$$a_{11} = \alpha\frac{\partial I}{\partial y},\ a_{12} = \alpha\frac{\partial I}{\partial r},\ a_{21} = \beta\frac{\partial M}{\partial y},\ a_{22} = \beta\frac{\partial M}{\partial r}.$$

Поведение линеаризованной системы определяется типом корней характеристического уравнения

$$\det\left(A - \lambda E_2\right) = 0,$$

которое является квадратным алгебраическим уравнением:

$$\lambda^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} = 0.$$

Если корни чисто мнимые ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), то система находится в незатухающих автоколебаниях с круговой частотой ω, при этом ее координаты u_1, u_2 описывают замкнутый цикл, проходящий через начальную точку u_1^0, u_2^0.

Если корни комплексные взаимно сопряженные ($\lambda_{1,2} = a \pm i\omega$), то при $a < 0$ система находится в затухающих автоколебаниях и возвращается в точку покоя $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. При $a > 0$ система находится в автоколебательном режиме с экспоненциально возрастающей амплитудой.

Если корни действительные (λ_1, λ_2, $\lambda_1 > \lambda_2$), то при $\lambda_1 < 0$ система из начального состояния u_1^0, u_2^0 возвращается в состояние покоя $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. При $\lambda_1 = 0$ система постепенно переходит в новое состояние покоя $u_1^E = -a_{22}u_1^0 + a_{12}u_2^0$, $u_2^E = a_{21}u_1^0 - a_{11}u_2^0$. При $\lambda_1 > 0$ система неограниченно удаляется от начального состояния u_1^0, u_2^0.

Поскольку

$$a_{12} = \alpha\frac{\partial I}{\partial r} < 0,\ a_{21} = \beta\frac{\partial M}{\partial y} > 0,\ a_{22} = \beta\frac{\partial M}{\partial r} < 0,$$

то варианты поведения реальной системы охватывают лишь часть вариантов поведения линейной двухсвязной системы, однако было показано, что возможна реализация всех описанных типов поведения.

Экономика в форме модели Солоу как односвязная нелинейная динамическая система

Снова вернемся к рассмотрению модели Солоу, поскольку она выполняет роль базовой. Напомним, что в абсолютных показателях эта модель имеет вид:

$$y = F(K, L),$$
$$y = I + C,$$
$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \quad K(0) = K_0,$$
$$L = L_0 e^{\nu t},$$

где y — ВВП;
I — инвестиции;
C — фонд потребления;
K — ОПФ;
L — число занятых;
μ — коэффициент износа;
ν — темп прироста числа занятых.

Структурная схема этой модели уже приводилась в § 1.1. На рис. 1.23 представим ее в следующем виде.

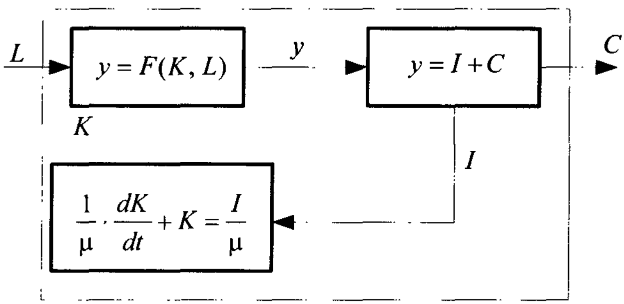

Рис. 1.23. ***Структурная схема модели Солоу***

Из рис. 1.23 видно, что входом в систему служит число занятых L, выходом — фонд потребления C, поэтому данная система односвязная. В структуре системы имеется контур обратной связи, который образуется из нелинейного статического элемента $y = F(K, L)$, распределительного линейного статического звена $y = I + C$ и инерционного звена $T\frac{dK}{dt} + K = \frac{I}{\mu}$, где $T = \frac{1}{\mu}$. Поскольку в системе имеется нелинейный элемент $y = F(K, L)$, то система нелинейна.

Роль регулятора в контуре обратной связи выполняет распределительное звено $y = I + C$. Обычно изучается такое долгосрочное регулирование, при котором соотношение между потреблением и накоплением постоянно. При этом

$$I = \rho y, \quad C = (1 - \rho)y, \quad \frac{I}{C} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

где ρ — норма накопления.

В качестве альтернативного варианта рассмотрим регулирование с постоянными инвестициями I. Пусть в начальный момент $t=0$ система находилась в состоянии равновесия при инвестициях I_0. Тогда установившееся решение инерционного звена $K_0=\dfrac{I_0}{\mu}$, поэтому $y_E^0=F(K_0,L)$, $C_E^0=y_E^0-I_0=F(K_0,\ L)-I_0$.

При постоянных инвестициях I_0 имеет место экстенсивный рост ВВП $y=F(K_0,L_0e^{\nu t})$ за счет роста числа занятых $L=L_0e^{\nu t}$. Фонд потребления также растет:

$$C_E^0=F(K_0,L_0e^{\nu t})-I_0.$$

Однако при этом фондовооруженность сокращается:

$$k(t)=\frac{K_0}{L_0e^{\nu t}}=k_0e^{-\nu t},\ k_0=\frac{K_0}{L_0},$$

а удельное потребление (в расчете на одного занятого) вначале растет, а затем сокращается. В самом деле, если $F(K,\ L)$ — линейно-однородная функция, то удельное потребление равно:

$$c_E^0(t)=\frac{C_E^0}{L}=\frac{F(K_0,L)-I_0}{L}=f(k_0e^{-\nu t})-\mu k_0e^{-\nu t},$$

где $\dfrac{F(K_0,L)}{L}=F\left(\dfrac{K_0}{L},1\right)=f\left(\dfrac{K_0}{L}\right)=f(k_0e^{-\nu t}).$

Поскольку производная (при $f'(k_0)<\mu<f'(0)$, $\nu>0$)

$$\frac{dc_E^0}{dt}=\nu k_0e^{-\nu t}\left[\mu-f'(k_0e^{-\nu t})\right]$$

в нуле положительна $\left(\dfrac{dc_E}{dt}=\nu k(\mu-f'(k_0))>0\right)$, а для достаточно больших t отрицательна $\left(\dfrac{dc_E}{dt}(t)\approx\nu k_0e^{-\nu t}\left[\mu-f'(0)\right]<0\right)$, то в некоторый момент $\hat{t}$ производная обратится в нуль:

$$f'(k_0e^{-\nu\hat{t}})=0.$$

Таким образом, при $t>\hat{t}$ удельное потребление начинает убывать. Поэтому возникает необходимость увеличить инвестиции с I_0 до некоторого нового значения $I=I_0+\Delta I$ ($\Delta I>0$). Предположим, что такое увеличение инвестиций произошло. Как с этого момента, который примем за новое начало отсчета времени, изменится поведение системы?

Поскольку ОПФ удовлетворяют уравнению инерционного звена

$$T\frac{dk}{dt}+K=\frac{I_0+\Delta I}{\mu},\quad K(0)=K_0=\frac{I_0}{\mu},$$

то как решение этого уравнения (которое было получено **и** исследовано в § 1.2) фонды будут изменяться следующим образом:

$$K(t)=K_0+\frac{\Delta I}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right),$$

$$\lim_{t\to\infty}K(t)=K_0+\frac{\Delta I}{\mu}=\frac{I_0+\Delta I}{\mu}=\frac{I}{\mu}=K_E.$$

Поэтому ВВП как функция ОПФ и числа занятых

$$y=F(K,L)=F\left[K_0+\frac{\Delta I}{\mu}\left(1-e^{-\nu t}\right),\ L_0e^{\nu t}\right]$$

будет возрастать за счет роста как фондов, так и числа занятых. По достижении фондами установившего значения K_E рост ВВП продолжится только за счет роста числа занятых:

$$y=F(K_E,\ L_0e^{\nu t}).$$

После этого по отмеченным выше соображениям (падение фондовооруженности и удельного потребления) через некоторое время снова потребуется увеличить ежегодные инвестиции.

Интересно отметить, что при рассмотренном варианте регулирования в течение всего переходного процесса норма накопления убывает:

$$\rho(t)=\frac{I}{y}=\frac{I}{F\left[\left(k_0+\frac{\Delta I}{\mu}(1-e^{-\mu t});L_0e^{\nu t}\right)\right]},$$

поскольку числитель постоянен, а знаменатель растет.

1.6. Управление динамическими системами

Под ***управлением*** понимается прямое воздействие на систему, направленное на достижение заданного результата.

В этом заключается основное отличие управления от регулирования, которое осуществляется на основе сравнения регулируемого (выходного) показателя с задающим (входным).

Под ***оптимальным управлением*** понимается выбор из множества возможных такого варианта управления, который по заданному критерию является оптимальным.

Выше последовательно были исследованы все более усложняющиеся системы от линейных односвязных до нелинейных многосвязных. Как видно из этого исследования, поведение любой нелинейной многосвязной системы описывается следующими уравнениями движения:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, x, t), \;\; y_i(0) = y_i^0, \;\; i = 1, ..., n, \tag{1.6.1}$$

где y — вектор фазовых координат, задающий состояние системы;

x — вектор внешних (входных) задающих и (или) возмущающих воздействий на систему;

y_i^0 — начальные значения фазовых переменных.

Если возмущающие воздействия пренебрежимо малы, некоторые из задающих воздействий становятся управляющими, а некоторые являются заданными известными функциями времени, то приходим к следующим уравнениям для управляемой динамической системы:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, u, t), \;\; y_i(0) = y_i^0, \;\; i = 1, ..., n, \tag{1.6.2}$$

где u — вектор управляющих параметров, $u \in U$;

U — область допустимых значений управляющих параметров.

Управляющая траектория (управление) $u(t)$ называется *допустимой*, если она кусочно-непрерывна и в точках разрыва непрерывна слева:

$$u(\tau) = u(\tau - 0) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t < \tau}} u(t)$$

и, кроме того, при любом t $u(t) \in U$.

Если задан закон управления, т.е. определена допустимая управляющая траектория $u(t)$, то уравнения для фазовых переменных принимают вид:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, u(t), t), \;\; y_i(0) = y_i^0, \;\; i = 1, ..., n, \tag{1.6.3}$$

тем самым при любых начальных условиях $y(0) = y^0$ однозначно определяется решение.

В качестве критерия оптимальности выбирается некоторый функционал от фазовой и управляющей траекторий, который подлежит максимизации (минимизации):

$$\max_u \int_0^T f_0(y(t), \; u(t), \; t)dt + F(y^T, \; T), \tag{1.6.4}$$

где $y(T) = y^T$ — возможное конечное значение вектора состояния.

Согласно принципу максимума Понтрягина, описанному в Приложении 3, алгоритм нахождения оптимального решения задачи **(1.6.3)**, **(1.6.4)** заключается в следующем.

1. Для каждого уравнения движения **(1.6.3)** вводится двойственная (сопряженная) переменная $\psi_i(t)$.

2. Строится функция Гамильтона (гамильтониан):

$$H(y,\psi,u,t)=f_0(y,u,t)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)f_i(y,u,t). \qquad \textbf{(1.6.5)}$$

3. Формируются уравнения для сопряженных переменных:

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \psi_i(T)=\frac{\partial F}{\partial y_i^T}. \qquad \textbf{(1.6.6)}$$

4. При фиксированных y, ψ, t определяются значения управляющих параметров, доставляющих максимум гамильтониану:

$$\max_{u\in U} H(y,\psi,u,t). \qquad \textbf{(1.6.7)}$$

5. Из участков уравнений $u(t)$, удовлетворяющих при каждом t соотношению **(1.6.7)**, формируется оптимальная управляющая траектория $u^*(t)$.

Экономика в форме односекторной модели оптимального роста как управляемая система

Односекторная модель экономического роста (модель Солоу), рассмотренная в § 1.1, в абсолютных показателях имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&Y=F(K,L),\\
&Y=I+C,\\
&\frac{dK}{dt}=-\mu K+I,\quad K(0)=K_0,\\
&L=L_0e^{\nu t},\quad L(0)=L_0.
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.6.8)}$$

В этой модели:

Y — ВВП;

K — ОПФ;

L — число занятых;

I — инвестиции;

C — фонд непроизводственного потребления;

ν — темп прироста числа занятых;

μ — коэффициент износа (выбытия) ОПФ.

Переменные Y, I, C, K, L являются *эндогенными* (определяемыми внутри модели), коэффициенты μ, ν — *экзогенными* (задаваемыми извне модели).

В удельных показателях (в расчете на одного занятого) данная модель принимает вид:

$$y = f(k), \quad \frac{dk}{dt} = -\lambda k + f(k) - c, \ \lambda = \mu + \nu, \ k(0) = k_0,$$

где $y = \dfrac{Y}{L} = F(k, 1) = f(k)$ — ВВП в расчете на одного занятого;

$k = \dfrac{K}{L}$ — фондовооруженность;

$c = \dfrac{C}{L}$ — непроизводственное потребление в расчете на одного занятого (удельное потребление).

Предположим теперь, что можно управлять удельным потреблением с целью максимизировать интегральное удельное дисконтированное потребление за длительный промежуток времени:

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} c(t) dt,$$

где δ — коэффициент дисконтирования.

В этот интеграл будущие значения удельного потребления входят с экспоненциально убывающим весом.

Таким образом, приходим к следующей модели *оптимального роста*:

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\delta t} c(t) dt, \tag{1.6.9}$$

$$\underline{c} \le c \le f(k), \tag{1.6.10}$$

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + f(k) - c, \ \ k(0) = k_0. \tag{1.6.11}$$

В этой задаче выражение **(1.6.9)** задает критерий, **(1.6.10)** — область допустимых значений управляющего параметра c ($\underline{c}$ — минимально допустимое с социальной точки зрения значение удельного потребления), **(1.6.11)** — уравнение для единственной фазовой переменной k. Решением данной задачи служит оптимальная допустимая траектория удельного потребления $c^*(t)$, доставляющая максимум функционалу **(1.6.9)**, и соответствующие ей оптимальные траектории фондовооруженности $k^*(t)$ и удельного ВВП $y^*(t) = f[k^*(t)]$. Вместе $c^*(t)$, $k^*(t)$ и $y^*(t)$ составляют траекторию оптимального экономического роста.

В соответствии с алгоритмом принципа максимума Понтрягина вводим одну сопряженную переменную ψ (поскольку только одна фазовая переменная k) и строим гамильтониан:

$$H = e^{-\delta t} c + \psi(-\lambda k + f(k) - c). \tag{1.6.12}$$

Уравнение для сопряженной переменной имеет вид $\left(\frac{d\Psi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial k},\ \Psi(T)=\frac{\partial F}{\partial y^T}\right)$:

$$\frac{d\Psi}{dt}=[\lambda-f'(k)]\Psi,\ \ \Psi(+\infty)=0.$$

Сопряженную переменную ψ удобнее представить в виде $\psi = e^{-\delta t}q$, поэтому $\frac{d\Psi}{dt}=-\delta e^{-\delta t}q+e^{-\delta t}\frac{dq}{dt}$

и для q получаем следующее уравнение:

$$\frac{dq}{dt}=-[f'(k)-(\lambda+\delta)]q. \qquad \textbf{(1.6.13)}$$

Поскольку общее решение уравнения **(1.6.13)** имеет вид: $q=\exp\left\{\int[f'[k(t)]-(\lambda+\delta)]dt\right\}$, то $q > 0$.

Теперь надо максимизировать гамильтониан:

$$\max_{\underline{c}\le c\le f(k)} e^{-\delta t}\left[(1-q)c+q(f(k)-\lambda)\right].$$

Поскольку, как видно из последнего выражения, гамильтониан линейно зависит от c с коэффициентом $(1 - q)$, то его максимум достигается на концах отрезка $[\underline{c},\ f(k)]$ при $q \neq 1$ и в некоторой промежуточной точке при $q = 1$, тем самым

$$c^*(t)=\begin{Bmatrix}\underline{c} & \text{при} & q>1,\\ c(t) & \text{при} & q=1,\\ f[k(t)] & \text{при} & q<1.\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(1.6.14)}$$

При уточнении оптимального правила **(1.6.14)** необходимо принимать во внимание, что k и q удовлетворяют уравнениям **(1.6.11)** и **(1.6.13)**, т.е. участки этих траекторий-решений участвуют в образовании правила **(1.6.14)**.

Уравнения **(1.6.11)** и **(1.6.13)** имеют следующие стационарные решения $\left(\frac{dk^E}{dt}=0,\ \frac{dq^E}{dt}=0\right)$:

$$f'(k^E)=\lambda+\delta, \qquad -\lambda k^E+f(k^E)=c^E. \qquad \textbf{(1.6.15)}$$

В частности, $q = 1$ является стационарным решением уравнения **(1.6.13)**, поэтому при $q = 1$ выполняется **(1.6.15)**. Таким образом, оптимальное правило приобретает следующий вид:

$$c^*(t)=\begin{Bmatrix}\underline{c} & \text{при} & q>1,\\ f(k^E)-\lambda k^E & \text{при} & q=1,\\ f[k(t)] & \text{при} & q<1.\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(1.6.16)}$$

Исследуем теперь оптимальные траектории фазовой и сопряженной переменных $k^*(t)$, $q^*(t)$ в предположении $\underline{c} < c^E$.

1. Вначале рассмотрим область $q > 1$. В этой области $c^*(t) = \underline{c}$, поэтому уравнение для фазовой переменной принимает вид:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - \underline{c}, \qquad k(0) = k_0. \qquad \textbf{(1.6.17)}$$

Обозначим через k_L меньший корень уравнения

$$f(k) - \lambda k - \underline{c} = 0,$$

графическое решение которого показано на рис. 1.24.

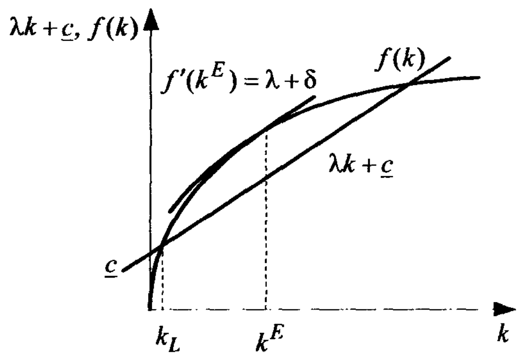

Рис. 1.24

Поскольку $\underline{c} < c^E$, то $f(k^E) - \lambda k^E - \underline{c} > 0$, тем самым $k_L < k^E$, поэтому при $k_0 < k_L$ $\frac{dk}{dt} < 0$, т.е. фондовооруженность убывает и удаляется от стационарного значения. Напротив, при $k_L < k_0 < k^E$ $\frac{dk}{dt} > 0$, и фондовооруженность возрастает, оставаясь левее стационарного значения $k(t) < k^E$. Поскольку $k(t) < k^E$, то согласно **(1.6.13)** $\frac{dq}{dt} < 0$, тем самым $q > 1$ и непрерывно убывает, поэтому наступит такой момент t_1^*, для которого $q(t_1^*) = 1$, при этом $k^*(t_1^*) = k^E$, $c^*(t_1^*) = f(k^E) - \lambda k^E = c^E$.

Если же $k_0 > k^E$, то согласно **(1.6.13)** $\frac{dq}{dt} > 0$ и $q(t)$ удаляется от стационарного значения $q^E = 1$.

2. Теперь рассмотрим область $q < 1$. В этом случае $c^*(t) = f[k(t)]$, т.е. на потребление работают все фонды (нет ни расширения, ни даже восстановления фондов), поэтому уравнение для фазовой переменной примет вид:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k, \quad k(0) = k_0.$$

Решение последнего уравнения —

$$k^*(t) = k_0 e^{-\lambda t}.$$

Если $k_0 < k^E$, то нет сходимости к стационарному значению k^E. При $k_0 > k^E$ фондовооруженность, убывая, в некоторый момент t_2^* достигнет стационарного значения k^E:

$$k_0 e^{-\lambda t_2^*} = k^E,$$

при этом $c^*(t_2^*) = c^E$.

На рис. 1.25, 1.26 показаны оптимальные траектории фондовооруженности и удельного потребления для тех случаев, когда имеет место сходимость к стационарным траекториям (верхний индекс (1) соответствует области $q > 1$, верхний индекс (2) — области $q < 1$).

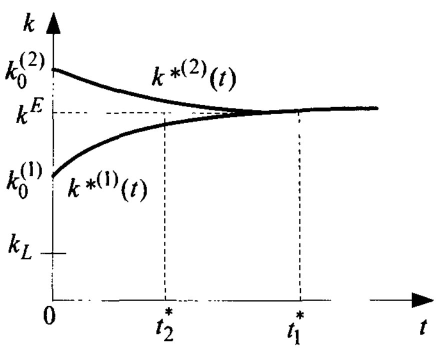

Рис. 1.25. Оптимальные траектории фондовооруженности

Таким образом, получаем следующую картину оптимального управления. При $q > 1$, $k_L < k_0 < k^E$ фондовооруженность непрерывно растет за счет того, что удельное потребление удерживается на предельно низком уровне. Как только в момент t_1^* фондовооруженность достигает стационарного значения, система переходит на стационарный режим: имеет место такое воспроизводство, которое позволяет поддерживать фондовооруженность на стационарном уровне k^E, удельное потребление постоянно равно $f(k^E) - \lambda k^E$, $q^E = 1$.

При $q < 1$, $k_0 > k^E$ в фонды не поступает никаких вложений, поэтому фондовооруженность сокращается за счет увеличения числа занятых по закону $k^*(t) = k_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \mu + \nu$, потребление также сокращается по закону $c^*(t) = f(k_0 e^{-\lambda t})$, пока фондовооруженность не достигнет в момент t^* стационарного значения k^E, после чего система входит в стационарный режим. Во всех остальных случаях система не достигает стационарного режима.

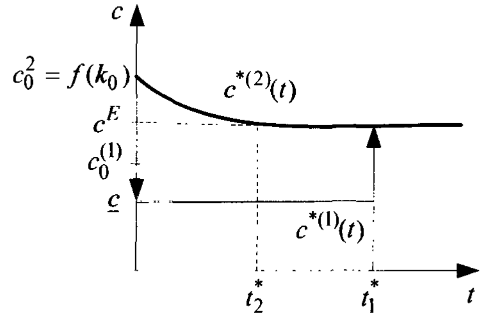

Рис. 1.26. ***Оптимальные траектории удельного потребления***

Оптимальный рост замкнутой трехсекторной экономики, описываемой в следующем разделе, представлен в Приложении 3.

Вопросы и задания

1. Что такое динамический элемент и динамическая система?
2. Почему экономика является динамической системой?
3. В чем сходство и различие понятий: «мультипликатор», «акселератор», «инерционное звено», «колебательное звено»? Где эти понятия используются в экономике?
4. Что такое импульсная функция? Какова импульсная функция инерционного звена?
5. Что такое переходная функция? Какова переходная функция инерционного звена?
6. Какова переходная функция колебательного звена?
7. Как среагирует экономика в форме упрощенной модели Кейнса $\frac{1}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{C+I}{1-c}$ на увеличение ежегодных инвестиций с I_0 до $I = I_0 + \Delta I$? Каков экономический смысл коэффициентов данной модели?

8. Как среагирует экономика в форме модели Самуэльсона—Хикса $\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{C+I}{1-c}$ на увеличение ежегодных инвестиций с I_0 до $I = I_0 + \Delta I$? Каков экономический смысл коэффициентов данной модели?

9. Как изменится реакция экономики в форме динамической модели Кейнса на изменение величины ежегодных инвестиций с I_0 до $I = I_0 + \Delta I$ при введении мультипликатора в контур обратной связи с данной моделью?

10. Как изменится реакция экономики в форме динамической модели Кейнса на изменение величины ежегодных инвестиций с I_0 до $I = I_0 + \Delta I$ при введении акселератора в контур обратной связи с этой моделью?

11. Что такое передаточная функция?

12. Каковы передаточные функции мультипликатора, акселератора, упрощенной модели Кейнса, модели Самуэльсона—Хикса?

13. Как найти передаточную функцию последовательного (параллельного) соединения, контура с обратной связью по передаточным функциям составляющих их элементов?

14. В каких соотношениях находятся импульсная и переходная функции с передаточной функцией?

15. Какая линейная динамическая система является устойчивой?

16. Устойчива ли экономика в форме упрощенной модели Кейнса?

17. Устойчива ли экономика в форме модели Самуэльсона—Хикса?

18. Что такое многосвязная динамическая система?

19. Можно ли говорить о передаточной функции нелинейной системы?

II

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

2

ТРЕХСЕКТОРНАЯ ЭКОНОМИКА КАК МАКРОМОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В настоящей главе рассмотрена математическая модель трехсекторной экономики как многосвязной нелинейной динамической системы и показано, как данная модель может быть применена для изучения переходных процессов в экономике, связанных со сменой одного варианта макроэкономической политики другим (в частности, рассматриваются стагнация и сбалансированный экономический рост).

2.1. Трехсекторная модель экономики

Для анализа воспроизводственного процесса и структурной политики недостаточно рассматривать экономику, состоящую только из двух подразделений, как это делал К. Маркс. Ведь средства производства, являющиеся продуктом первого подразделения, включают две принципиально отличные друг от друга составляющие: предметы труда, используемые в одном производственном цикле, и средства труда, принимающие участие во многих производственных циклах.

Таким образом, разделив первое подразделение на два сектора — материальный и фондосоздающий, приходим к модели трехсекторной экономики:

1) *материальный* (*нулевой*) сектор — предметы труда (топливо, электроэнергия, сырье и другие материалы);

2) *фондосоздающий* (*первый*) сектор — средства труда (машины, оборудование, производственные здания, сооружения и т.д.);

3) *потребительский* (*второй*) сектор — предметы потребления.

Предполагается, что за каждым сектором закреплены основные производственные фонды (ОПФ), в то время как трудовые ресурсы и инвестиции могут свободно перемещаться между секторами.

Кроме того, примем предположения, аналогичные сделанным в односекторной модели Солоу, которая выполняет роль базовой.

1. Технологический уклад считается постоянным и задается с помощью линейно-однородных неоклассических производственных функций:

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

где X_i, K_i, L_i — выпуск, ОПФ и число занятых в i-м секторе.

2. Общее число занятых в производственной сфере L изменяется с постоянным темпом прироста ν.

3. Лаг капиталовложений отсутствует.

4. Коэффициенты износа ОПФ μ_i и прямых материальных затрат a_i секторов постоянны.

5. Экономика замкнутая, т.е. внешняя торговля напрямую не рассматривается.

6. Время t изменяется непрерывно.

Предположение 2 в дискретном времени имеет вид (t — номер года):

$$\frac{L(t+1)-L(t)}{L(t)}=\nu,$$

которое при переходе к непрерывному времени принимает форму:

$$\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{L(t)}=\nu\Delta t.$$

Последнее соотношение при $\Delta t \to 0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dL}{dt}=\nu L, \quad L(0)=L^0,$$

которое имеет решение

$$L=L^0e^{\nu t}. \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Из предположений 3, 4 вытекает, что изменение за год ОПФ i-го сектора состоит из двух частей: износа $(-\mu_i K_i)$ и прироста за счет валовых капиталовложений $(+I_i)$, т.е.

$$K_i(t+1) - K_i(t) = -\mu_i K_i(t) + I_i(t), \quad i = 0, 1, 2,$$

или в непрерывном времени:

$$K_i(t+\Delta t) - K_i(t) = -[\mu_i K_i(t) + I_i(t)]\,\Delta t.$$

При $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальные уравнения для ОПФ секторов:

$$\frac{dK_i}{dt}=-\mu_i K_i+I_i, \quad K_i(0)=K_i^0, \quad i=0,1,2. \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Далее значок времени t везде опущен, но предполагается по умолчанию. ОПФ и число занятых в секторах (K_i, L_i) являются *мгновенными* показателями, иными словами, их значения можно определить (измерить) в любой момент времени t. Выпуск секторов и инвестиции (X_i, I_i) являются показателями типа *потока*, т.е. их значения накапливаются за год, начинающийся в момент t.

Таким образом, при сделанных предположениях трехсекторная модель экономики в абсолютных показателях примет вид (на рис. 2.1 представлена графическая форма модели):

$$\left.\begin{array}{ll}
L = L(0)e^{\nu t} & \text{— число занятых;} \\
L_0 + L_1 + L_2 = L & \text{— распределение занятых по секторам;} \\
\dfrac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \quad K_i(0) = K_i^0, \quad i = 0, 1, 2 & \text{— динамика фондов по секторам;} \\
X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2 & \text{— выпуск продукции по секторам;} \\
X_1 = I_0 + I_1 + I_2 & \text{— распределение продукции фондосоздающего сектора;} \\
X_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 & \text{— распределение продукции материального сектора.}
\end{array}\right\} \quad (2.1.3)$$

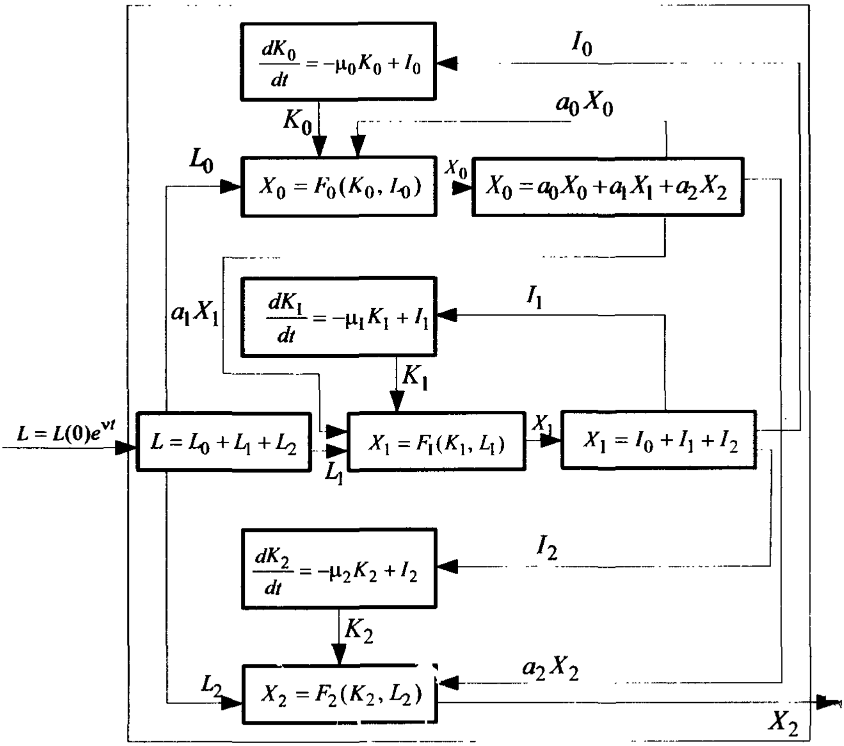

Рис. 2.1. Структурная схема трехсекторной экономики

Как видно из рис. 2.1, в состав модели входят следующие д е с я т ь элементов:

1) четыре линейных динамических элемента первого порядка:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \quad i = 0,\ 1,\ 2, \qquad \frac{dL}{dt} = \nu L;$$

2) три линейных статических распределительных элемента:

$$L = L_0 + L_1 + L_2,$$
$$X_1 = I_0 + I_1 + I_2,$$
$$(1 - a_0)X_0 = a_1 X_1 + a_2 X_2;$$

3) три нелинейных статических элемента:

$$X_i = F_i(K_i, L_i),\ i = 0,\ 1,\ 2.$$

Как видим, трехсекторная модель является *динамической*, поскольку имеет в своем составе четыре линейных динамических элемента. Она *нелинейна*, поскольку выпуски секторов заданы нелинейными производственными функциями. Кроме того, она *многосвязна*, поскольку ее состояние представлено тремя (не одной!) фазовыми (выходными) переменными X_0, X_1, X_2, взаимосвязанными с помощью балансов.

В этих балансах проявляется *эмерджентность* экономической системы, т.е. наличие у нее таких общих свойств, которые не присущи составляющим ее отдельным элементам. Эти общие свойства как раз и проявляются во взаимосвязанном (взаимообусловленном) изменении фазовых переменных: каждый сектор производит не любой объем продукции, но столько, сколько нужно другим секторам и потребителям, и столько, на сколько хватит ресурсов.

Эндогенными, т.е. определяемыми с помощью модели, переменными являются ОПФ и выпуски секторов (K_i, X_i).

Экзогенными, т.е. заданными извне модели, переменными (параметрами) служат: темп прироста числа занятых ν, коэффициенты износа ОПФ секторов μ_i, коэффициенты прямых материальных затрат секторов a_i, начальное значение числа занятых L^0, начальные значения ОПФ секторов K_i^0, а также параметры производственных функций.

Управление осуществляется путем распределения трудовых ($L = L_0 + L_1 + L_2$) и инвестиционных ($X_1 = I_0 + I_1 + I_2$) ресурсов. В случае централизованной экономики это распределение реализуется директивным образом, а в децентрализованной — косвенно, с помощью цен, тарифов, налогов и других экономических инструментов.

Для анализа финансовых потоков к модели в натуральной форме **(2.1.3)** необходимо добавить балансы доходов и расходов секторов (p_i, t_i, w_i — цены, ставки налогов и годовые ставки заработной платы в секторах).

Баланс доходов и расходов материального сектора:

$$p_0(1 - a_0)X_0 = p_1 I_0 + t_0 X_0 + L_0 w_0.$$

Баланс доходов и расходов фондосоздающего сектора:

$$p_1X_1 = p_0a_1X_1 + t_1X_1 + L_1w_1.$$

Баланс доходов и расходов потребительского сектора:

$$p_2X_2 = p_0a_2X_2 + p_1I_1 + t_2X_2 + L_2w_2.$$

Сложив эти три уравнения, получим баланс предложения предметов потребления и платежеспособного спроса:

$$p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i.$$

В самом деле, слева в последнем уравнении — стоимость произведенных предметов потребления, а справа — суммарный доход работников производственной сферы $\left(\sum_{i=0}^{2} w_iL_i\right)$ и суммарный доход работников непроизводственной сферы и пенсионеров $\left(\sum_{i=0}^{2} t_iX_i\right)$.

Поскольку последнее уравнение является следствием первых трех, то независимых стоимостных балансов только три. Удобнее в качестве трех независимых балансов выбрать балансы доходов и расходов материального и фондосоздающего секторов, а также баланс предложения предметов потребления и платежеспособного спроса. Таким образом, получаем три следующих независимых стоимостных баланса:

$$\left.\begin{aligned} p_0(1 - a_0)X_0 &= p_1I_0 + t_0X_0 + L_0w_0, \\ p_1X_1 &= p_0a_1X_1 + t_1X_1 + L_1w_1, \\ p_2X_2 &= \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.4)$$

Если выпуски секторов определены по натуральным балансам **(2.1.3)**, то девять стоимостных переменных (це́ны, ставки налогов и заработной платы) связаны тремя стоимостными балансами **(2.1.4)**, так что в изменении стоимостных переменных имеются шесть степеней свободы. В частности, из **(2.1.4)** видно, что стоимостные балансы по-прежнему будут выполнены, если цены, ставки налогов и заработной платы вырастут в одинаковое число раз.

2.2. Производственные функции секторов экономики РФ

Для работы с трехсекторной моделью необходимо определить ее экзогенные параметры. Наибольшую трудность представляет установление параметров производственных функций (ПФ) секторов. Примем, что последние являются функциями Кобба—Дугласа:

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{1-\alpha} L_i^{1-\alpha}, \ i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

где A_i — коэффициент нейтрального технического прогресса;
α_i — коэффициент эластичности по фондам.

Параметры A_i, α_i удобнее определять для функций в относительных показателях:

$$x_i = A_i k_i^{\alpha_i}, \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

где $x_i = \dfrac{X_i}{L_i}$, $k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ — производительность труда[1] и фондовооруженность в расчете на одного занятого в i-м секторе.

Параметры ПФ **(2.2.2)** можно найти по временны́м рядам производительности и фондовооруженности (T — число лет)

$$x_i(t), k_i(t), \ t = 1, ..., T,$$

определенным по рядам выпусков, ОПФ и числа занятых в i-м секторе:

$$X_i(t), K_i(t), L_i(t), \ t = 1, ..., T.$$

При расчете параметров теоретическая модель **(2.2.2)** заменяется ее статистическим аналогом:

$$x_i(t) = \delta_i(t) A_i k_i^{\alpha}(t),$$

где $\delta_i(t)$ — корректировочный коэффициент.

Эта модель в логарифмах сводится к модели линейной парной регрессии:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha z_t + \varepsilon_t,$$

где $y_t = \ln x_i(t)$, $\alpha_0 = \ln A$, $z_t = \ln k(t)$, $\varepsilon_t = \ln \delta_i(t)$.

При проведении расчетов были использованы данные официальной статистики РФ за 1960—1998 гг. Стоимостные показатели пересчитаны в сопоставимые цены 1983 г. Содержательная интерпретация использованных показателей:

X_0 — показатель «Производственные материальные затраты»;

X_1 — показатель «Накопление» за вычетом показателя «Производство предметов потребления»;

X_2 — показатель «Непроизводственное потребление».

---

[1] Здесь $x_i = \dfrac{X_i}{L_i}$ — отраслевая производительность, в последующих параграфах под $x_i = \dfrac{X_i}{L}$ понимается народно-хозяйственная производительность.

Показатели K_i, $i = 0, 1, 2$, определялись по показателям «Основные производственные фонды по отраслям народного хозяйства» на основе отраслевого состава секторов.

Показатели L_i, $i = 0, 1, 2$, определялись по показателям «Распределение населения, занятого в народном хозяйстве, по отраслям» на основе отраслевого состава секторов.

Для непосредственного расчета ПФ секторов были использованы данные РФ за 1960—1991 гг. Но для практического использования были бы более интересны ПФ, характеризующие настоящий период времени, т.е. с 1991 г. — с момента радикального изменения экономической политики. Однако данных с 1992 по 1998 г. недостаточно, чтобы сколько-нибудь надежно оценить коэффициенты ПФ. Кроме того, с 1992 г. Российская Федерация перешла на международную систему национальных счетов, поэтому данные 1960—1991 гг. и 1992—1998 гг. несопоставимы.

Период с 1960 по 1991 г. также весьма неоднороден. Его можно разделить на два подпериода: с 1960 по 1980 г. и с 1981 по 1991 г. Первый подпериод характеризуется достаточно высокими темпами роста, обусловленными как ранее заложенными тенденциями развития, так и быстрым освоением богатых нефтегазовых месторождений Западной Сибири. Второй подпериод — время стабильного затухающего роста (его также называют «застойным»), когда факторы экстенсивного роста уже были исчерпаны, нефть и газ с верхних пластов были выкачаны, а их добыча с более глубоких пластов требовала все бóльших затрат. В целом второй подпериод можно рассматривать как участок выхода на стационарные траектории. Таким образом, наиболее целесообразно использовать данные за весь период 1960—1991 гг.

В результате расчетов[1] были найдены следующие производственные функции секторов:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= 6{,}19 K_0^{0{,}46} L_0^{0{,}54}, \\ X_1 &= 1{,}35 K_1^{0{,}68} L_1^{0{,}32}, \\ X_2 &= 2{,}71 K_2^{0{,}49} L_2^{0{,}51}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3)$$

Из (2.2.3) видно, что для 1960—1991 гг.

$$\alpha_0 < \alpha_1, \quad \alpha_0 < \alpha_2. \qquad (2.2.4)$$

Из определения коэффициентов эластичности следует, что увеличение ОПФ сырьевых отраслей на 1% приводит к росту объемов выпуска продукции на α_0%, в то время как такое же увеличение фондов фондосоздающих и потребительских отраслей приводит к

[1] Сбор данных, их пересчет в сопоставимые цены 1983 г. и приведение к виду, необходимому для расчета ПФ, а также сам расчет ПФ выполнила в 1999—2000 гг. старший преподаватель кафедры прикладной математики ГУУ *Л.А. Константинова.*

росту выпуска продукции на α_1% и α_2% соответственно. Поскольку $\alpha_0 < \alpha_1$, $\alpha_0 < \alpha_2$, то *один и тот же относительный прирост фондов обеспечивает больший относительный прирост объемов выпуска продукции в обрабатывающих отраслях по сравнению с соответствующим приростом продукции в сырьевых отраслях.*

Или иначе: *сырьевые отрасли технологически менее развиты, чем обрабатывающие.* Представляется, что соотношение **(2.2.5)**, обнаруженное как факт для экономики Российской Федерации 1960—1991 гг., является *распространенной экономической закономерностью,* которая может нарушаться только во время освоения новых крупных месторождений природных ресурсов, имеющих благоприятные условия их разработки. Косвенным подтверждением этого служит стремление развитых стран «сбросить» сырьевые отрасли в другие страны при одновременном стимулировании развития собственных обрабатывающих и наукоемких отраслей.

В дальнейшей работе с моделью соотношения **(2.2.4)** будут применяться как гипотетическое предположение, имеющее экспериментальные и косвенные подтверждения.

Из официальных статистических данных, использованных для расчетов ПФ секторов экономики РФ, вытекает также, что ОПФ материального сектора составляют более половины ОПФ производственной сферы[1], т.е. $s_0 > 0{,}5$, а доля занятых — до трети от общего числа занятых в сфере материального производства ($\theta_0 \approx 0{,}33$). Кроме того, доля ОПФ и доля занятых в фондосоздающем секторе примерно одинаковы, т.е. $s_0 \approx \theta_0$.

Таким образом, распределение ресурсов характеризуется асимметрией: большее число занятых сосредоточено в обрабатывающих отраслях, бóльшая доля фондов — в сырьевых отраслях.

На наш взгляд, сложившаяся структура распределения ресурсов обусловлена, по крайней мере, следующими факторами:

- условия труда в сырьевых отраслях более тяжелые, чем в обрабатывающих, что предопределяет долговременную тенденцию перелива рабочей силы в обрабатывающие отрасли;
- сырьевые отрасли технологически менее развиты, что приводит к долговременной тенденции увеличения фондов в сырьевых отраслях, а это, в свою очередь, компенсирует в определенной мере их меньшую относительную фондоотдачу по сравнению с обрабатывающими отраслями;
- центральное звено экономической системы — фондосоздающий сектор, обеспечивающий полноценный воспроизводственный процесс, должен получать ресурсы в сбалансированном виде, т.е. $\theta_0 \approx s_0$.

---

[1] Долговременное применение одной и той же структурной политики в распределении инвестиций приводит к аналогичной структуре фондов, поэтому долю ОПФ можно приближенно трактовать как долю инвестиций.

Эти противоречивые долговременные тенденции и предопределяют асимметрию в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами:

$$\theta_0 < s_0,\ \theta_1 \approx s_1,\ \theta_2 > s_2. \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

Изменить подобную стихийно складывающуюся структуру или улучшить ее можно только посредством специальной государственной структурной политики, важнейшим элементом которой служило бы стимулирование инвестиций в фондосоздающий сектор.

В результате агрегирования межотраслевых балансов РФ за 1985—1987 гг. и осреднения коэффициентов были определены следующие коэффициенты прямых материальных затрат по секторам (руб. материалов на 1 руб. производства продукции соответствующего сектора):

$$a_0 = 0{,}39, \quad a_1 = 0{,}29, \quad a_2 = 0{,}52.$$

2.3. Стагнация

Исследуем с помощью трехсекторной модели экономики две, в определенной мере противоположные, ситуации: стагнацию и сбалансированный экономический рост.

Первая ситуация представляет интерес постольку, поскольку она в мягкой форме отражает поведение экономики РФ в 90-е гг. XX в.

Стагнация — застой в экономике.

Покажем на модели, как фиксация поступлений ресурсов в фондосоздающий сектор приводит в конечном счете к стагнации и падению производства в расчете на одного занятого. Напомним, что согласно модели натуральные балансы рассматриваются как равенства, поэтому сокращения занятых не происходит.

Итак, пусть поступления инвестиций и труда в фондосоздающий сектор стабилизированы: $I_1^0 = \mathrm{const}$, $L_1^0 = \mathrm{const}$. Тогда параллельно начинают протекать три взаимосвязанных переходных процесса:

1) переход к стационарному значению ОПФ фондосоздающего сектора и тем самым к фиксированному выпуску инвестиционных товаров:

$$Y_1^0 = F_1(K_1^0, L_1^0);$$

2) переход к установившимся значениям ОПФ материального и потребительского секторов:

$$K_0^E = \frac{I_0^E}{\mu_0},\ K_2^E = \frac{I_2^E}{\mu_2} \qquad \left(I_0^E + I_2^E = Y_1^0 - I_1^E\right);$$

3) постепенное падение удельного выпуска предметов потребления в расчете на одного занятого (более медленный рост выпуска по сравнению с ростом числа занятых с постоянным темпом прироста $\nu > 0$):

$$\frac{F_2\left(K_2^E, L_2^E\right)}{L}.$$

Рассмотрим подробнее каждый из этапов. Хотя в действительности эти процессы проходят одновременно, условно будем считать, что они протекают последовательно, без наложения друг на друга.

Последствия фиксации поступления ресурсов в фондосоздающий сектор

При фиксации поступления инвестиций в **первый** (фондосоздающий) сектор его ОПФ будут вести себя согласно уравнению инерционного звена:

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{dK_1}{dt} + K_1 = \frac{I_0}{\mu_1},$$

тем самым фонды будут изменяться как решение этого уравнения

$$K_1(t) = K_1(0)e^{-\mu_1 t} + \frac{I_1^0}{\mu}\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right), \quad \lim_{t\to\infty} K_1(t) = \frac{I_1^0}{\mu}.$$

Поэтому выпуск инвестиционных товаров при фиксированном числе занятых в первом секторе будет возрастать (в соответствии с производственной функцией):

$$Y_1(t) = F_1[K_1(t), L_1^0].$$

По завершении переходного процесса ОПФ фондосоздающего сектора и его выпуск (инвестиционных товаров) перейдут к своим стационарным значениям:

$$K_1^0 = \frac{I_1^0}{\mu}, \quad Y_1^0 = F_1(K_1^0, L_1^0).$$

Последствия фиксации выпуска инвестиционных товаров

По завершении первого переходного процесса экономика будет характеризоваться постоянством ресурсов и выпуска первого сектора $I_1^0, K_1^0, L_1^0, Y_1^0$. В связи с этим показатели, характеризующие поведение материального и потребительского секторов, будут связаны следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &L_0 + L_2 = L - L_1^0, && (1)\\ &I_0 + I_2 = Y_1^0 - I_1^0, && (2)\\ &(1-a_0)Y_0 = a_2 Y_2 + a_1 Y_1^0, && (3)\\ &\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{dK_0}{dt} + K_0 = \frac{I_0}{\mu_0}, \quad \frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{dK_2}{dt} + K_2 = \frac{I_2}{\mu_2}. && (4) \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(2.3.1)}$$

Второе уравнение в соотношениях **(2.3.1)** показывает, что суммарные инвестиции в материальный и фондосоздающий секторы постоянны. Распределим их постоянными частями между секторами:

$$I_0^0 + I_2^0 = Y_1^0 - I_1^0. \qquad \mathbf{(2.3.2)}$$

Тогда ОПФ материального и потребительского секторов будут вести себя следующим образом (как решения уравнений инерционных звеньев):

$$K_0(t) = K_0(0)e^{-\mu_0 t} + \frac{I_0^0}{\mu_0}\left(1 - e^{-\mu_0 t}\right), \quad \lim_{t\to\infty} K_0(t) = \frac{I_0^0}{\mu_0} = K_0^0,$$

$$K_2(t) = K_2(0)e^{-\mu_0 t} + \frac{I_2^0}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right), \quad \lim_{t\to\infty} K_2(t) = \frac{I_2^0}{\mu_2} = K_2^0,$$

а по завершении переходного процесса перейдут к стационарным значениям $K_0^0 = \dfrac{I_0^0}{\mu_0}$, $K_2^0 = \dfrac{I_2^0}{\mu_2}$, определяемым принятым распределением инвестиций.

Проверим теперь, возможно ли добиться выполнения материального баланса хотя бы при стационарных значениях K_0^0, K_2^0 путем соответствующего распределения труда между материальным и потребительским секторами:

$$\left.\begin{aligned} &(1-a_0)F_0(K_0^0, L_0) = a_1 Y_1^0 + a_2 F_2(K_2^0, L_2), && (1)\\ &L_0 + L_2 = L - L_1. && (2) \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(2.3.3)}$$

Если окажется, что нет такого распределения труда, при котором выполняется материальный баланс (первое уравнение **(2.3.3)**), и при этом

$$(1-a_0)F_0(K_0^0, L_0) < a_1 Y_1^0 + a_2 F_2(K_2^0, L_2),$$

т.е. товарного выпуска материалов недостаточно для удовлетворения потребностей в них фондосоздающего и потребительского секторов, то, увеличивая I_0^0 до значения $I_0^E > I_0^0$ и тем самым уменьшая I_2^0 на ту же величину до значения $I_2^E < I_2^0$, можно, вообще говоря, найти такие $K_0^E = \frac{I_0^E}{\mu_0}$, $K_2^E = \frac{I_2^E}{\mu_2}$, что первое уравнение **(2.3.3)** выполняется для некоторого распределения труда:

$$\begin{cases}(1-a_0)F_0(K_0^E, L_0^E) = a_1 Y_1^0 + a_2 F_2(K_2^E, L_2^E),\\ \tilde{L}_0 + \tilde{L}_2 = L - L_1^0.\end{cases}$$

Проведя соответствующую корректировку полученного распределения труда, можно добиться выполнения материального баланса и в переходный период.

Последствия фиксации ОПФ материального и потребительского секторов

Поскольку производственные функции секторов являются линейно-однородными, то удельный выпуск предметов потребления по завершении второго переходного процесса будет вести себя следующим образом:

$$y_2(t) = \frac{F_2\left(K_2^E, L_2^E\right)}{L} = \frac{L_2^E}{L}\cdot\frac{F_2\left(K_2^E, L_2^E\right)}{L_2^E} = \frac{L_2^E}{L} f_2(k_2^E),$$

где $f_2(k_2^E) = F_2\left(\frac{K_2^E}{L_2^E}, 1\right)$ — возрастающая функция, так как неоклассическая функция $F_2(K_2, L_2)$ возрастает по каждому аргументу.

Фондовооруженность потребительского сектора

$$k_2^E = \frac{K_2^E}{L_2^E}$$

будет сокращаться, поскольку $k_2^E = \text{const}$, а число занятых в этом секторе L_2^E увеличивается вместе с ростом общего числа занятых.

Итак, фиксация инвестиций в фондосоздающий сектор имеет своим конечным итогом сокращение удельного выпуска предметов потребления, что и является убедительным побудительным мотивом к отказу от политики стагнации и переходу к активной экономической политике с увеличением инвестиций во все секторы и прежде всего в фондосоздающий сектор.

2.4. Сбалансированный экономический рост

Сбалансированный экономический рост рассматривается при фиксированном технологическим укладе.

Сбалансированность экономического роста понимается как выполнение на траектории роста трудового, инвестиционного и материального балансов.

Далее будем обозначать через θ_i, s_i доли секторов в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов:

$$\theta_i = \frac{L_i}{L}, \quad s_i = \frac{I_i}{X_1}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Под *структурной политикой* будем понимать выбор конкретной структуры распределения ресурсов (возможно, изменяющейся во времени) $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, $s = (s_0, s_1, s_2)$, удовлетворяющей условиям сбалансированности по труду и инвестициям:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_i \geq 0, \\ s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_i \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

Материальный баланс в относительных показателях примет вид:

$$(1 - a_0)\theta_0 f_0(k_0) = a_1\theta_1 f_1(k_1) + a_2\theta_2 f_2(k_2), \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

или

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

где $f_i(k_i) = \dfrac{X_i}{L_i} = \dfrac{F_i(K_i, L_i)}{L_i} = F_i(k_i, 1)$ — отраслевая производительность труда i-го сектора;

$x_i = \dfrac{X_i}{L} = \theta_i f_i(k_i)$ — народно-хозяйственная производительность i-го сектора.

Уравнения **(2.1.2)** перейдут в следующие уравнения для фондовооруженности секторов:

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_1}{\theta_1} x_1, \quad \lambda_i = \mu_i + \nu, \quad k_i(0) = k_i^0 = \frac{K_i^0}{L_i^0}, \quad i = 0, 1, 2. \qquad \textbf{(2.4.3)}$$

Таким образом, получили модель трехсекторной экономики в относительных показателях, представленную уравнениями **(2.4.1)**—**(2.4.3)**. Далее примем, что производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа:

$$F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \quad f_i(k_i) = A_i k_i^{\alpha_i}, \quad i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(2.4.4)}$$

где A_i — коэффициент нейтрального технического прогресса;
α_i — коэффициент эластичности по фондам.

Начальные условия уравнений **(2.4.3)** $k_i(0) = k_i^0$, $i = 0, 1, 2$ — это результат той структурной политики, которая проводилась до некоторого момента времени, принятого нами за начальный. Выбор новой структурной политики (θ, s), не совпадающей с прежней, приводит к возникновению в экономической системе переходного процесса, который и является предметом изучения.

Назовем ***траекторией сбалансированного экономического роста*** такую траекторию $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$, на которой в любой момент времени t выполнены все балансы и все удельные выпуски растут.

Уравнения **(2.4.3)** при фиксированной структурной политике имеют стационарное (установившееся) решение (E — значок установившегося решения):

$$\left.\begin{aligned} k_0^E &= \frac{s_0}{\theta_0} x_1^E(\theta_1,\ s_1), \quad x_1^E = \theta_1 A_1 (k_1^E)^{\alpha_1}, \\ k_1^E &= \left(\frac{s_1 A_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \\ k_2^E &= \frac{s_2}{\theta_2} x_1^E(\theta_1, s_1). \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.5)}$$

Из уравнений **(2.4.5)** видно, что из $k_i < k_i^E$ следует $\frac{dk_i}{dt} > 0$, а при $\frac{dk_i}{dt} = 0$ $k_i = k_i^E$. Таким образом, для обеспечения роста фондовооруженности секторов необходимо выполнение условия

$$k_i^0 < k_i^E, \quad i = 0,\ 1,\ 2. \qquad \textbf{(2.4.6)}$$

Другими словами, для обеспечения экономического роста структурная политика должна удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{s_0\theta_1}{\theta_0} > \frac{\lambda_0 k_0^0}{A_1 (k_1^0)^{\alpha_1}}, \quad s_1 > \frac{\lambda_1 k_1^0}{A_1 (k_1^0)^{\alpha_1}}, \quad \frac{s_2\theta_1}{\theta_2} > \frac{\lambda_2 k_2^0}{A_1 (k_1^0)^{\alpha_1}}. \qquad \textbf{(2.4.7)}$$

Кроме того, для обеспечения роста удельного выпуска инвестиционных товаров необходимо также выполнение условия $x_1^0 < x_1^E$, что применительно к θ_1 выглядит следующим образом:

$$\theta_1 > \theta_1^0 \cdot \left(\frac{k_1^0}{k_1^E}\right)^{\alpha_1}, \quad k_1^E = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}. \qquad \textbf{(2.4.8)}$$

Таким образом, если выбранная структурная политика (θ, s) удовлетворяет условиям **(2.4.7)**, **(2.4.8)**, то фондовооруженность и удельные выпуски секторов монотонно растут, т.е. имеет место *устойчивый экономический рост.*

Является ли этот рост сбалансированным? По труду и инвестиционным товарам сбалансированность имеет место, поскольку выполнено условие **(2.4.1)**. Осталось выяснить, как обстоят дела с материальным балансом. Прежде всего, он должен быть выполнен в начальной момент времени (напомним, что $f_i(k_i) = A_i k_i^{\alpha_i}$):

$$(1-a_0)\theta_0 f_0(k_0^0) = a_1\theta_1 f_1(k_1^0) + a_2\theta_2 f_2(k_2^0).$$

Поскольку параметры распределения труда $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ связаны еще и уравнением трудового баланса

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1,$$

то из этих двух последних уравнений вытекает, что доли материального и потребительского секторов должны следующим образом выражаться через долю фондосоздающего сектора в распределении труда:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}_0^0 &= \frac{a_2 f_2(k_2^0)(1-\theta_1) + a_1 f_1(k_1^0)\theta_1}{(1-a_0)f_0(k_0^0) + a_2 f_2(k_2^0)}, \\ \hat{\theta}_2^0 &= \frac{(1-a_0)f_0(k_0^0)(1-\theta_1) - a_1 f_1(k_1^0)\theta_1}{(1-a_0)f_0(k_0^0) + a_2 f_2(k_2^0)}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.9)}$$

Естественно предположить, что в начальный момент материальный баланс был выполнен, поэтому имели место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0^0 &= \frac{a_2 f_2(k_2^0)(1-\theta_1^0) + a_1 f_1(k_1^0)\theta_1^0}{(1-a_0)f_0(k_0^0) + a_2 f_2(k_2^0)}, \\ \theta_2^0 &= \frac{(1-a_0)f_0(k_0^0)(1-\theta_1^0) - a_1 f_1(k_1^0)\theta_1^0}{(1-a_0)f_0(k_0^0) + a_2 f_2(k_2^0)}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.10)}$$

Из уравнений динамики фондовооруженности секторов видна центральная роль фондосоздающего сектора в развитии всей экономики. Именно его удельный выпуск определяет фондовооруженность и удельные выпуски других секторов, т.е. чем больше выпуск фондосоздающего сектора, тем больше выпуски материального и потребительского секторов при прочих равных условиях. Но увеличение удельного выпуска первого сектора требует большего «вливания» ресурсов в него и отнимает ресурсы у других секторов. Поэтому должны существовать оптимальные значения долей ресурсов, направляемых в фондосоздающий сектор.

Так, согласно результатам, приведенным в гл. 3, трехсекторная экономика имеет сбалансированный технологический оптимум при установившейся структурной политике $(\theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*, s_0^*, s_1^*, s_2^*)$, что вместе с **(2.4.8)** дает

$$\theta_1^0 \left(\frac{k_1^0}{k_1^E} \right)^{\alpha_1} < \theta_1 < \theta_1^* .$$

Поэтому, вообще говоря, $\theta_1 \neq \theta_1^0$. При этом из $\theta_1^0 < \theta_1^*$ следует, что рациональная структурная политика должна состоять в выборе $\theta_1 > \theta_1^0$.

Таким образом, *сбалансированный экономический рост в трехсекторной экономике в направлении технологического оптимума может быть обеспечен первоначальным переливом трудовых ресурсов в фондосоздающий сектор.* Из этого, в частности, следует, что *сбалансированный рост не может осуществляться при фиксированной структурной политике.*

Исследовать переходный процесс проще всего при фиксированной структурной политике, но она не обеспечивает сбалансированности. Поэтому ниже рассматривается компромиссный вариант: часть компонент структурной политики (θ, s) фиксирована, а другие компоненты меняются во времени. Такие компоненты будем отмечать значком «^».

Таким образом, центральное место в трехсекторной экономике занимает фондосоздающий сектор. Именно его рост обеспечивает развитие материального и потребительского секторов. Поэтому доли фондосоздающего сектора в расходе ресурсов θ_1, s_1 далее будем считать фиксированными с тем, чтобы по результатам исследования выбрать их наиболее рациональным образом. Остальные компоненты структурной политики $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_2, \hat{s}_0, \hat{s}_2$ будем выбирать в каждый момент времени t таким образом, чтобы обеспечить сбалансированный экономический рост. Таким образом, θ_1, s_1 в каждый момент времени выполняют роль свободных переменных.

В целом траектория сбалансированного экономического роста распадается на т р и участка:

1) выход на траекторию устойчивого сбалансированного роста;

2) устойчивый сбалансированный экономический рост;

3) выход на стационарную траекторию устойчивого сбалансированного роста.

Выход на траекторию устойчивого сбалансированного роста

Назначение данного этапа состоит в том, чтобы довести доли фондосоздающего сектора в ресурсах до заданных значений θ_1, s_1, $\theta_1 > \theta_1^0$.

Пусть в некоторый момент времени t (например, $t = 0$) материальный баланс выполняется и $k_i'(t) > 0$. Покажем теперь, как варьированием компонентами $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_2$ можно добиться выполнения материального баланса при росте фондовооруженности.

В самом деле, пусть за время Δt компонента θ_1 фондосоздающего сектора получила приращение $\Delta\hat{\theta}_1 > 0$, тогда выполнение трудового и материального балансов в момент $t + \Delta t$ обеспечивается, если

$$\begin{cases} \Delta\hat{\theta}_0 + \Delta\hat{\theta}_1 + \Delta\hat{\theta}_2 = 0, \\ (1-a_0)f_0(k_0)\Delta\hat{\theta}_0 - a_1 f_1(k_1)\Delta\hat{\theta}_1 - a_2 f_2(k_2)\Delta\hat{\theta}_2 = \\ = -\left[(1-a_0)f_0'(k_0)k_0' - a_1 f_1'(k_1)k_1' - a_2 f_2(k_2)k_2'\right]\Delta t. \end{cases}$$

Решение последней системы имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\hat{\theta}_0 &= \frac{\left[a_1 f_1(k_1) - a_2 f_2(k_2)\right]\Delta\hat{\theta}_1}{(1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)} - \\ &- \frac{\left[(1-a_0)f_0'(k_0)k_0' - a_1 f'(k_1)k_1' - a_2 f_2'(k_2)k_2'\right]\Delta t}{(1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)}, \\ \Delta\hat{\theta}_2 &= \frac{-\left[(1-a_0)f_0(k_0) + a_1 f_1(k_1)\right]\Delta\hat{\theta}_1}{(1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)} + \\ &+ \frac{\left[(1-a_0)f_0'(k_0)k_0' - a_1 f'(k_1)k_1' - a_2 f_2'(k_2)k_2'\right]\Delta t}{(1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.11)}$$

При новых значениях $\hat{\theta}_0 + \Delta\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_2 + \Delta\hat{\theta}_2$ скорость роста фондовооруженности секторов по-прежнему будет положительной, если

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hat{s}_0}{\hat{\theta}_0^2}\Delta\hat{\theta}_0 &< \frac{k_0'(\hat{\theta}_0)}{\hat{x}_1(\hat{\theta}_1)}, \quad (1) \\ \frac{\hat{s}_2}{\hat{\theta}_2^2}\Delta\hat{\theta}_2 &< \frac{k_2'(\hat{\theta}_2)}{\hat{x}_1(\hat{\theta}_1)}. \quad (2) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.12)}$$

Если $\Delta\hat{\theta}_0 < 0$, $\Delta\hat{\theta}_2 < 0$, то условие **(2.4.12)** обязательно выполняется. Поскольку $\Delta\hat{\theta}_1 > 0$, то только одно из приращений $\Delta\hat{\theta}_0$ или $\Delta\hat{\theta}_2$ может быть положительным. Допустим $\Delta\hat{\theta}_0 > 0$, $\Delta\hat{\theta}_2 < 0$. Тогда второе из неравенств **(2.4.12)** по-прежнему выполняется, а первое может и не выполняться. Рассмотрим именно этот случай, тогда

$$\frac{dk_0}{dt} = -\lambda k_0 + \frac{\hat{s}_0\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_0 + \Delta\hat{\theta}_0} f_1(k_1) < 0.$$

Увеличим долю материального сектора в распределении инвестиционных ресурсов на такое $\Delta\hat{s}_0 > 0$, чтобы $\dfrac{dk_0}{dt} > 0$, если при этом[1]

$$\frac{dk_2}{dt} = -\lambda k_2 + \frac{\hat{s}_2 - \Delta\hat{s}_0}{\hat{\theta}_2 + \Delta\hat{\theta}_2}\hat{\theta}_1 f_1(k_1) > 0\,, \tag{2.4.13}$$

то можно переходить к следующему шагу итерации.

Если нельзя подобрать такое Δs_0, то первый этап закончен; при этом на следующем этапе $\theta_1 = \hat{\theta}_1$. Если на всех шагах итерации $\dfrac{dk_i}{dt} > 0$, $i = 0, 2$, то первый этап заканчивается на первоначально выбранном значении θ_1.

Устойчивый сбалансированный экономический рост

Этап начинается с момента (который далее принимаем за начальный), когда доля фондосоздающего сектора в распределении трудовых ресурсов достигла желаемого или возможного значения θ_1, доля инвестиционных ресурсов установлена на желаемом значении s_1, при этом материальный баланс выполнен и $k_i'(0) > 0$, $i = 0, 1, 2$.

Далее будем рассматривать структурную политику

$$\theta = (\hat{\theta}_0, \theta_1, \hat{\theta}_2), \qquad s = (\hat{s}_0, s_1, \hat{s}_2),$$

характеризующуюся постоянством отношения долей инвестиционных и трудовых ресурсов, направляемых в материальный сектор:

$$\frac{\hat{s}_0}{\hat{\theta}_0} = \gamma, \tag{2.4.14}$$

причем конкретное значение γ определяется по окончании первого этапа.

Тогда фондовооруженность секторов удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dk_0}{dt} = -\lambda_0 k_0 + \gamma x_1, \quad k_0(0) = \hat{k}_0, \\ &\frac{dk_1}{dt} = -\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, \quad k_1(0) = \hat{k}_1, \\ &\frac{dk_2}{dt} = -\lambda_2 k_2 + \frac{\hat{s}_2}{\hat{\theta}_2} x_1, \quad k_2(0) = \hat{k}_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.15}$$

где $x_1 = A_1 k_1^{\alpha_1}$,

---

[1] Например, условие **(2.4.13)** будет выполнено, если при выборе $\Delta\hat{s}_0 = \dfrac{\hat{s}_0}{\hat{\theta}_0}\Delta\hat{\theta}_0$ окажется $\dfrac{\Delta\hat{s}_0}{\hat{\theta}_2} + \hat{s}_2\,\dfrac{\Delta\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_2^2} < k_2'$.

$\hat{k}_i$ — значение фондовооруженности i-го сектора по окончании первого этапа.

Решения уравнений для фондовооруженности материального и фондосоздающего секторов определяются однозначно:

$$k_0(t) = \gamma e^{-\lambda_0 t} \int_0^t x_1(\tau) e^{\lambda_0 \tau} d\tau + \hat{k}_0 e^{-\lambda_0 t},$$

$$k_1(t) = \left[(k_1^E)^{1-\alpha_1} + e^{-(1-\alpha_1)\lambda_1 t} \left((\hat{k}_1)^{1-\alpha_1} - (k_1^E)^{1-\alpha_1} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

Причем $k_i'(t) > 0, \quad i = 0, 1,$ и

$$\lim_{t\to\infty} k_0(t) = \frac{\gamma}{\lambda_0} x_1^E = k_0^E, \quad x_1^E = \theta_1 A_1 (k_1^E)^{\alpha_1},$$

$$\lim_{t\to\infty} k_1(t) = k_1^E = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

Для обеспечения сбалансированности в каждый момент времени t должен выполняться материальный баланс:

$$(1 - a_0)\hat{\theta}_0 f_0(k_0) = a_1 \theta_1 f_1(k_1) + a_2 \hat{\theta}_2 f_2(k_2).$$

Пусть это соотношение выполняется в некоторый момент t (например, при $t = 0$, т.е. по окончании первого этапа). Покажем, как обеспечить его выполнение в момент $t + \Delta t$. Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\hat{\theta}_2 = -\Delta\hat{\theta}_0, \\ &\Delta\hat{\theta}_0 = \frac{-(1-a_0)\hat{\theta}_0 f_0'(k_0)k_0' + a_1\theta_1 f_1'(k_1)k_1' + a_2\hat{\theta}_2 f_2'(k_2)k_2'}{(1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)} \Delta t. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.16)}$$

Поскольку траектории материального и фондосоздающего секторов предопределены, то на них по-прежнему $k_i'(t + \Delta t) > 0, \quad i = 0, 1,$ поэтому необходимо только проверить знак $k_2'(t + \Delta t)$. Для положительности этой производной необходимо, чтобы

$$\frac{\hat{s}_2}{\hat{\theta}_2} \left(\frac{\Delta\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_2} - \frac{\Delta\hat{s}_2}{\hat{s}_2} \right) < k_2'(t).$$

Однако $\Delta\hat{\theta}_2 = -\Delta\hat{\theta}_0, \quad \Delta\hat{s}_2 = -\Delta\hat{s}_0 = -\gamma\Delta\theta_0$, поэтому ($-\hat{s}_2 + \gamma\hat{\theta}_2 > 0$, поскольку $\gamma > 1, \quad \hat{\theta}_2 > \hat{s}_2$)

$$\Delta\hat{\theta}_0 < \frac{\hat{\theta}_2 k_2'(t)}{\hat{s}_2(-\hat{s}_2 + \gamma\hat{\theta}_2)}. \qquad \textbf{(2.4.17)}$$

Итак, если условие **(2.4.17)** выполняется (например, при $\Delta\hat{\theta}_0 < 0$), то $k_2'(t+\Delta t) > 0$, т.е. по-прежнему имеет место рост фондовооруженности потребительского сектора.

Условие **(2.4.17)**, вообще говоря, может не выполняться на некотором участке траектории, тогда на этом участке будет иметь место падение фондовооруженности потребительского сектора, в то время как фондовооруженность материального и фондосоздающего секторов по-прежнему будет возрастать.

Выход на стационарную траекторию сбалансированного экономического роста

Данный этап рассматривается как завершение предыдущего. Продолжается та же самая структурная политика, однако в связи с приближением к заранее предопределенным значениям фондовооруженности материального и фондосоздающего секторов переменные компоненты структурной политики также сходятся к своим стационарным значениям. Напомним, что на стационарной траектории $\frac{dk_i}{dt} = 0,\ i = 0, 1, 2,$ т.е. фондовооруженность секторов — величина постоянная.

Для обеспечения сбалансированности в каждый момент времени должны быть выполнены соотношения, аналогичные **(2.4.10)**. Представим их в следующей эквивалентной форме:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\theta}_0 = 1 - \theta_1 - \hat{\theta}_2, && (1)\\ &\hat{\theta}_2 = \frac{(1-a_0)f_0(k_0)(1-\theta_1) - a_1 f_1(k_1)\theta_1}{(1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)}. && (2)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.4.18)}$$

Поскольку $k_i = k_i(t)$, то и $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(t)$.

Для выявления поведения $\hat{\theta}_2(t)$ как функции времени исследуем правую часть второго соотношения **(2.4.18)**:

$$g(t) = \frac{(1-a_0)f_0[k_0(t)](1-\theta_1) - a_1 f_1[k_1(t)]\theta_1}{(1-a_0)f_0[k_0(t)] + a_2 f_2[k_2(t)]}.$$

Имеем

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{(1-a_0)f_0(1-\theta_1)a_1 f_1\left(\frac{\alpha_1 k_1'}{k_1} - \frac{\alpha_0 k_0'}{k_0}\right)}{[(1-a_0)f_0 + a_2 f_2]^2} +$$

$$+\frac{(1-a_0)f_0\theta_1 a_1 f_1\left(\frac{\alpha_2 k_2'}{k_2} - \frac{\alpha_0 k_0'}{k_0}\right) + a_1 f_1 \theta_1 a_2 f_2\left(\alpha_1\frac{k_1'}{k_1} + \alpha_2\frac{k_2'}{k}\right)}{[(1-a_0)f_0 + a_2 f_2]^2}, \qquad \textbf{(2.4.19)}$$

где $f_i = f_i[k_i(t)] = A_i k_i^{\alpha_i}(t)$, $i = 0, 1, 2$.

Из **(2.4.19)** видно, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dg}{dt}=0.$$

Однако при больших, но конечных значениях t производная отрицательна $\left(\dfrac{dg}{dt}<0\right)$, поскольку согласно фундаментальному предположению, сформулированному в § 2.2, $\alpha_0<\alpha_1$, $\alpha_0<\alpha_2$.

Итак, при выходе на стационарную траекторию (т.е. при больших значениях t) доля $\hat{\theta}_2(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу ($\hat{\theta}_2>0$), поэтому существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{\theta}_2(t)=\theta_2^E$.

Предельные значения θ_2^E определим из предельного соотношения

$$\theta_2^E=\frac{(1-a_0)f_0(k_0^E)(1-\theta_1)-a_1f_1(k_1^E)\theta_1}{(1-a_0)f_0(k_0^E)+a_2f_2(k_2^E)},\qquad \textbf{(2.4.20)}$$

в котором

$$\left.\begin{aligned}
&k_0^E=\gamma\frac{x_1^E}{\lambda_0},\quad k_1^E=\left(\frac{s_1A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}},\quad k_2^E=\frac{s_2^E}{\theta_1^E}\cdot\frac{x_1^E}{\lambda_2},\\
&\theta_i^E=\lim_{t\to\infty}\hat{\theta}_i,\quad s_i^E=\lim_{t\to\infty}\hat{s}_i,\quad i=0,2,\\
&f_i(k_i^E)=A_i(k_i^E)^{\alpha_i},\quad i=0,1,2,\quad x_1^E=\theta_1A_1(k_1^E)^{\alpha_1}.
\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(2.4.21)}$$

Используя соотношение

$$s_2^E=1-s_1-\gamma\theta_0^E=1-s_1-\gamma(1-\theta_1)+\gamma\theta_2^E,$$

получим из **(2.4.20)** следующее трансцендентное уравнение для θ_2^E:

$$a\theta_2^E+b(\theta_2^E)^{1-\alpha_2}\left[1-s_1-\gamma(1-\theta_1)+\gamma\theta_2^E\right]^{\alpha_2}=a(1-\theta_1)-a_1x_1^E,\qquad \textbf{(2.4.22)}$$

где $a=(1-a_0)A_0(k_0^E)^{\alpha_0}$, $b=a_2A_2\left(\dfrac{x_1^E}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2}$, при этом $a(1-\theta_1)-a_1x_1^E>0$.

Поскольку справа в **(2.4.22)** стоит положительная константа, а слева — возрастающая функция $\theta_2=\theta_2^E$, то это уравнение имеет единственное решение $\theta_2^E\ge 1-\theta_1-\dfrac{1-s_1}{\gamma}$.

Если при движении по траектории сбалансированного экономического роста $\hat{\theta}_2$, убывая, достигнет значения

$$\hat{\theta}_2 < 1 - \theta_1 - \frac{1 - s_1}{\gamma},$$

то предельного значения θ_2^E не существует, поэтому надо так пересмотреть фиксированные элементы структурной политики (γ, θ_1, s_1), чтобы

$$\hat{\theta}_2 > 1 - \tilde{\theta}_1 - \frac{1 - \tilde{s}_1}{\tilde{\gamma}}.$$

По θ_2^E определяем и остальные предельные (стационарные) значения переменных элементов структурной политики:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0^E &= 1 - \theta_1 - \theta_2^E, \\ s_0^E &= \gamma\theta_0^E, \\ s_2^E &= 1 - s_1 - \gamma\theta_0^E. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2.4.23)}$$

По завершении переходного процесса возможны два варианта дальнейшего развития:

1) переход к новому стационарному состоянию, более близкому к технологическому оптимуму, что осуществляется по описанному в данном параграфе сценарию;

2) переход к новому технологическому укладу в результате перевооружения, что требует дальнейшего исследования в рамках шестисекторной модели.

Выводы

1. Структурная политика, обеспечивающая сбалансированный экономический рост, состоит в варьировании долями материального и потребительского секторов в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов с целью выполнения материального баланса и в поддержании на постоянном уровне долей фондосоздающего сектора θ_1, s_1 и соотношения между аналогичными долями материального сектора $\gamma = \frac{\hat{s}_0}{\hat{\theta}_0}$. Выбор фиксированных элементов (γ, θ_1, s_1) структурной политики осуществляется при соблюдении условий **(2.4.7)**, **(2.4.8)** и таким образом, чтобы приблизиться к технологическому оптимуму.

2. На первом этапе осуществляется сбалансированный перелив трудовых и инвестиционных ресурсов в фондосоздающий сектор для выхода на их заданные значения $\theta_1, s_1, \theta_1 > \theta_1^0$, при этом возможна корректировка этих долей в сторону уменьшения.

3. На этапе сбалансированного экономического роста осуществляется корректировочное варьирование долями материального и потребительского секторов с целью обеспечения сбалансированности и устойчивости роста, при этом фондовооруженность материального и фондосоздающего секторов изменяется по предопределенным (фиксированным элементам структурной политики) траекториям. Возможна корректировка фиксированных элементов.

4. По завершении движения по траектории сбалансированного экономического роста экономика переходит в сбалансированное установившееся состояние, которое, вообще говоря, не зависит от начальных значений фондовооруженности секторов k_0^0, k_1^0, k_2^0 и параметров распределения труда $\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0$, но зависит от технологических параметров $\alpha_i, A_i, a_i, \lambda_i,\ i = 0, 1, 2,$ и от фиксированных элементов структурной политики (γ, θ_1, s_1). Установившиеся значения переменных параметров структурной политики определяются по соотношениям **(2.4.22)**, **(2.4.23)**.

Таким образом, в результате проведенного исследования из первоначальных структурных макропараметров $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$ выделены две группы параметров:

- *стратегические* параметры $\gamma, \theta_1, s_1 \left(\gamma = \dfrac{s_0}{\theta_0}\right)$, которые определяют результат развития и поэтому должны быть предметом непосредственного государственного воздействия, включая разработку и реализацию приоритетных государственных программ по развитию машиностроения и других отраслей фондосоздающего сектора;
- *тактические* параметры $\theta_0, \theta_2, s_2\ (s_0 = \gamma\theta_0)$, с помощью которых осуществляется регулирующее воздействие с целью обеспечения сбалансированности экономики по материальным ресурсам. Такое саморегулирующее воздействие может обеспечить рынок при контроле и коррекции со стороны государства.

Вопросы и задания

1. Из каких элементов состоит модель трехсекторной экономики? В каком случае она является линейной динамической системой?
2. Почему трехсекторная модель экономики является многосвязной нелинейной динамической системой?

3. Назовите отрасли, входящие в состав материального, фондосоздающего и потребительского секторов.
4. Дайте ваше истолкование фундаментальной закономерности $\alpha_0 < \alpha_1$, $\alpha_0 < \alpha_2$.
5. В чем проявляется центральная роль фондосоздающего сектора в экономике, его принципиальное отличие от материального и фондосоздающего секторов?
6. При каких условиях в трехсекторной экономике имеет место стагнация?
7. При каких условиях в трехсекторной экономике будет наблюдаться сбалансированный устойчивый рост?
8. Определите одну из возможных траекторий сбалансированного экономического роста по данным об экзогенных параметрах трехсекторной модели, приведенным в § 2.2, выбрав в качестве начальных условий фактические значения фондовооруженности секторов РФ за 1991 г. ($k_0 = 45{,}8$; $k_1 = 15{,}5$; $k_2 = 9{,}1$ тыс. руб. в ценах 1983 г. на одного занятого).

3

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

В настоящей главе исследуются макроэкономические процессы, вызванные изменениями в распределении ресурсов между секторами. Ранее было показано, что по завершении переходного процесса трехсекторная экономика приходит в стационарное состояние. Стационарное состояние характеризуется постоянством фондовооруженности и удельных выпусков секторов (k_i = const; x_i = const; $i = 0, 1, 2$). Хотя теоретически переходный процесс продолжается бесконечно, практически через относительно короткий промежуток времени экономика будет находиться вблизи от своего стационарного состояния, определяемого проводимой структурной политикой.

С экономической точки зрения ***стационарное состояние*** — это состояние «усеченного» расширенного воспроизводства, когда инвестиции расходуются на замену выбывших средств труда и частично на такое расширение основных производственных фондов, которое обеспечивает сохранение фондовооруженности на постоянном уровне, несмотря на рост занятости с постоянным темпом.

Полномасштабное расширенное воспроизводство имело бы место, если выбывшие фонды заменялись новыми, имеющими более высокий технологический уровень.

Ниже проведено исследование поведения удельных выпусков секторов при переходе от одного стационарного состояния к другому. В частности, доказывается, что трехсекторная экономика имеет *технологический оптимум*. Иными словами, существует такое сбалансированное стационарное состояние, для которого удельный выпуск предметов потребления максимален.

3.1. Натурально-стоимостные балансы

Как отмечалось выше, стационарное состояние характеризуется постоянством удельных показателей. *Сбалансированное состояние* — это такое состояние, в котором выполнены все натурально-стоимостные балансы.

Приведем эти балансы для стационарного состояния.

Натуральные балансы:

- трудовой баланс:

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2; \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

- инвестиционный баланс:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1,\ \ s_i \geq 0,\ \ i = 0, 1, 2; \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

- материальный баланс:

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2\,. \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

Стоимостные балансы:

- баланс доходов и расходов материального сектора:

$$p_0(1 - a_0)x_0 = p_1 s_0 x_1 + w_0\theta_0 + t_0 x_0; \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

- баланс доходов и расходов фондосоздающего сектора:

$$p_1(1 - s_1)x_1 = p_0 a_1 x_1 + w_1\theta_1 + t_1 x_1; \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

- баланс предложения предметов потребления и платежеспособного спроса:

$$p_2 x_2 = \sum_{i=0}^{2} w_i\theta_i + \sum_{i=0}^{2} t_i x_i\,. \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

Шесть уравнений натурально-стоимостных балансов **(3.1.1)—(3.1.6)** связывают между собой параметры распределения труда $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, распределения инвестиций $s = (s_0, s_1, s_2)$, цены $p = (p_0, p_1, p_2)$, ставки заработной платы $w = (w_0, w_1, w_2)$ и ставки налогов (на единицу выпуска) $t = (t_0, t_1, t_2)$.

Таким образом, параметров 15, и все они по своему экономическому смыслу неотрицательны, а уравнений — шесть, поэтому имеется девять степеней свободы. Меняя один или несколько параметров, можно проследить, как меняются остальные, если при этом считать, что и в новом состоянии выполнены все натурально-стоимостные балансы. Таким образом, появляется инструмент для исследования условий возникновения и характерных особенностей течения важных макроэкономических процессов. Если изменения малы, то переходными процессами можно пренебречь. Именно при таких предположениях в гл. 4, 5 исследуются инфляция и налогообложение.

Уравнения **(3.1.1)—(3.1.6)** по форме линейны, однако нелинейность проявляется в зависимости удельных выпусков от структурных параметров $x_i = x_i(\theta, s)$, $i = 0, 1, 2$. В дальнейших исследованиях будем полагать, что производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа:

$$F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i},\ \ i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

поэтому

$$f_i(k_i) = A_i k_i^{\alpha_i}, \quad x_i = \theta_i f_i(k_i) = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}. \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

Используя стационарное решение уравнений для фондовооруженности секторов **(2.4.21)**, получаем стационарные значения фондовооруженности и удельных выпусков секторов (табл. 3.1).

Таблица 3.1. ***Стационарные удельные выпуски и фондовооруженность секторов***

Наименование сектора	*Фондовооруженность*	*Народно-хозяйственная производительность труда*
Материальный	$k_0 = \dfrac{s_0 x_1}{\theta_0 \lambda_0}$	$x_0 = \theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0}$
Фондосоздающий	$k_1 = \left(\dfrac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}$	$x_1 = \theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}$
Потребительский	$k_2 = \dfrac{s_2 x_1}{\theta_2 \lambda_2}$	$x_2 = \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}$

Если в выражения для удельных выпусков секторов в табл. 3.1 подставить значения стационарной фондовооруженности секторов из этой же таблицы, то удельные выпуски секторов примут вид мультипликативных функций от параметров распределения труда $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ и инвестиций $s = (s_0, s_1, s_2)$:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_1 &= B_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_2 &= B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_2 \alpha_1}{1-\alpha_1}}, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.1.9)}$$

где $B_0 = A_0 A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} \lambda_1^{-\frac{\alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1}}$, $B_1 = A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}$,

$B_2 = A_2 A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_2^{-\alpha_2} \lambda_1^{-\frac{\alpha_2 \alpha_1}{1-\alpha_1}}$.

Материальный баланс **(3.1.3)** в этом случае примет форму нелинейного (относительно параметров распределения ресурсов) трансцендентного уравнения:

$$(1-a_0)B_0\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}s_0^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} =$$

$$= a_1B_1\theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + a_2B_2\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}s_2^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_2\alpha_1}{1-\alpha_1}}. \qquad \textbf{(3.1.10)}$$

Используя только натуральные балансы, можно выявить технологически возможные сбалансированные состояния трехсекторной экономики на всем диапазоне изменения параметров распределения труда и инвестиций. Добавляя к натуральным стоимостные балансы, можно выяснить экономические возможности достижения наиболее предпочтительных из технологически сбалансированных состояний.

В § 3.2 будет доказано, что трехсекторная экономика имеет технологический оптимум. Иными словами, имеется такая сбалансированная стационарная структурная политика $(\theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*, s_0^*, s_1^*, s_2^*)$, при которой удельный выпуск предметов потребления максимален. Поэтому приобретает конкретный смысл употребленное выше выражение «более предпочтительное состояние»: чем ближе состояние (θ, s) к оптимальному состоянию (θ^*, s^*), тем оно предпочтительнее.

Для того чтобы обеспечить регулируемую миграцию трудовых ресурсов в направлении оптимального распределения труда, целесообразно следующим образом управлять ставками заработной платы:

$$w_j - w = \gamma_w(\theta_j^* - \theta_j),\ j = 0, 1, 2,\ \lambda_w > 0,$$

где $w = \sum_{j=0}^{2} w_j\theta_j$ — средняя заработная плата в производственной сфере,

т.е. следует устанавливать заработную плату выше среднего уровня в тех секторах, в которых доля занятых ниже оптимальной.

Для того чтобы управлять движением инвестиционных потоков в направлении оптимального распределения продукции фондосоздающего сектора, целесообразно следующим образом устанавливать налоговые льготы:

$$t\theta_j - t_j x_j = \lambda_t(s_j^* - s_j),\ j = 0, 1, 2,\ \lambda_t > 0,$$

где $t = \frac{T}{L} = t_0x_0 + t_1x_1 + t_2x_2$ — средний налог на одного занятого;

T — общий объем налоговых поступлений,

т.е. следует устанавливать налоговые льготы для тех секторов, доля инвестиций в которых ниже оптимальной.

Разумеется, это только концептуальный подход к экономическому решению задачи движения к технологическому оптимуму. Ниже (в гл. 5) данная проблема будет рассмотрена более подробно.

3.2. «Золотое» правило распределения труда и инвестиций между секторами

В § 3.1 было показано, что любое стационарное сбалансированное состояние трехсекторной экономики задается конкретным распределением ресурсов $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, $s = (s_0, s_1, s_2)$, которое удовлетворяет трудовому, инвестиционному и материальному балансам **(1.3.1)—(1.3.3)**. Таким образом, имеется шесть параметров, связанных тремя балансами, и, следовательно, остается три степени свободы в изменении этих параметров.

Возникает вопрос, как наилучшим образом распорядиться ресурсами при имеющихся степенях свободы.

Суверенные страны с относительно замкнутой и социально ориентированной экономикой ставят своей целью максимизацию благосостояния всего населения (или максимизацию удельного потребления) за счет собственного производства предметов потребления.

При примерном постоянстве доли занятых в общей численности населения это означает необходимость максимизировать производство предметов потребления в расчете на одного занятого в производственной сфере:

$$\max_{(\theta, s)} x_2(\theta, s)$$

при выполнении балансов **(3.1.1)—(3.1.3)**.

Таким образом, приходим к следующей задаче нелинейного программирования (коэффициент B_2 при целевой функции опустим).

Найти

$$\max_{(\theta, s)} \quad \theta_1^{\alpha_2} \theta_2^{1-\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{1-\alpha_1}} s_2^{\alpha_2} \tag{3.2.1}$$

при условии, что переменные (θ, s) связаны следующими соотношениями:

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \tag{3.2.2}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \tag{3.2.3}$$

$$(1 - a_0) B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1}} =$$

$$= a_1 B_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + a_2 B_2 \theta_1^{\alpha_2} \theta_2^{1-\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{1-\alpha_1}} s_2^{\alpha_2}, \tag{3.2.4}$$

$$\theta_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2. \tag{3.2.5}$$

Задача нелинейного программирования **(3.2.1)—(3.2.5)** всегда имеет решение, поскольку ее область допустимых решений является трехмерным многообразием в шестимерном пространстве, не пуста и ограничена. На границе $\left(\{\theta_1=0\}\cup\{s_1=0\}\cup\{\theta_2=0\}\cup\{s_2=0\}\right)$ области допустимых решений критериальная функция обращается в нуль, поэтому максимум может достигаться только во внутренней области. Поскольку критериальная функция нелинейна и ограничена в допустимой области, то глобальный максимум является локальным максимумом, который определяется в заключительной части § 3.3.

Определение субоптимального распределения ресурсов

Определим субоптимальное решение в два приема: вначале найдем максимум удельного потребления при фиксированных θ_0, s_0, не проверяя при этом выполнение материального баланса, т.е. условия **(3.2.4)**, а затем вариацией (θ_0, s_0) добьемся выполнения баланса и выйдем на субоптимальное решение.

Первый этап. Функция цели **(3.2.1)** является произведением двух функций:

1) $\theta_1^{\alpha_2}\theta_2^{1-\alpha_2}$, 2) $(s_1^{\alpha_1}s_2^{1-\alpha_1})^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}$.

Максимум первой функции при условии $\theta_1+\theta_2=1-\theta_0=\text{const}$ достигается при следующих значениях долей фондосоздающего и потребительского секторов в распределении трудовых ресурсов:

$$\theta_1^*=\alpha_2(1-\theta_0),\quad \theta_2^*=(1-\alpha_2)(1-\theta_0), \tag{3.2.6}$$

т.е. доля фондосоздающего сектора пропорциональна эластичности по фондам потребительского сектора, а доля потребительского сектора — его эластичности по труду.

Максимум второй функции при условии $s_1+s_2=1-s_0=\text{const}$ достигается при следующих значениях долей фондосоздающего и потребительского секторов в распределении инвестиционных ресурсов:

$$s_1^*=\alpha_1(1-s_0),\quad s_2^*=(1-\alpha_1)(1-s_0), \tag{3.2.7}$$

т.е. доля фондосоздающего сектора пропорциональна его эластичности по фондам, а доля потребительского сектора — эластичности фондосоздающего сектора по труду.

Второй этап. Подставив найденные на первом этапе значения долей фондосоздающего и потребительского секторов в распределении ресурсов в функцию цели и уравнение материального баланса, получим задачу на условный максимум.

Найти

$$\max_{(\theta_0, s_0)}(1-\theta_0)(1-s_0)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \tag{3.2.8}$$

при выполнении следующих условий:

$$0<\theta_0<1, \qquad 0<s_0<1,$$

$$D_0\left(\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\right)^{1-\alpha_0} s_0^{\alpha_0}=D_1(1-s_0)^{\frac{\alpha_1-\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}+D_2(1-s_0)^{\frac{\alpha_2-\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \qquad \textbf{(3.2.9)}$$

где $D_0=(1-a_0)B_0\alpha_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}\alpha_2^{\alpha_0}$,

$D_1=a_1B_1\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\alpha_2$,

$D_0=a_2B_2\alpha_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}(1-\alpha_1)^{\alpha_2}\alpha_2^{\alpha_2}(1-\alpha_2)^{1-\alpha_2}$.

Разрешим уравнение **(3.2.9)** относительно θ_0:

$$\theta_0(s_0)=\left\{1+s_0^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}}\left[\frac{D_1}{D_0}(1-s_0)^{\frac{\alpha_1-\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}+\frac{D_2}{D_0}(1-s_0)^{\frac{\alpha_2-\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}\right]^{-\frac{1}{1-\alpha_0}}\right\}^{-1}. \qquad \textbf{(3.2.10)}$$

Из **(3.2.10)** видно, что $\theta_0(0)=1$, $0_0(1)=0$, $\theta_0'(s_0)<0$.

Подставив **(3.2.10)** в функцию цели, приходим к следующей задаче на безусловный максимум функции одной переменной:

$$\max_{0<s_0<1}[1-\theta_0(s_0)](1-s_0)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}. \qquad \textbf{(3.2.11)}$$

Поскольку $\theta_0(s_0)$ — убывающая функция, то первый сомножитель в **(3.2.11)** — возрастающая функция от s_0, а второй сомножитель — убывающая функция от s_0, поэтому целевая функция **(3.2.11)** имеет максимум в точке s_0^*, определяемой из уравнения

$$\frac{\alpha}{1-\alpha_1}[1-\theta_0(s_0)]=-\theta_0'(s_0)(1-s_0). \qquad \textbf{(3.2.12)}$$

Таким образом, трехсекторная экономика имеет технологический максимум, при этом субоптимальное распределение ресурсов, находящееся «вблизи» от оптимального, таково:

$$\theta_0^*=\theta_0(s_0^*),\ \theta_1^*=\alpha_2(1-\theta_0^*),\ \theta_0^*=(1-\alpha_2)(1-\theta_0),$$

$$s_0^*,\ s_1^*=\alpha_1(1-s_0^*),\ s_2^*=(1-\alpha_1)(1-s_0^*), \qquad \textbf{(3.2.13)}$$

где s_0^* — решение уравнения **(3.2.12)**, в котором $\theta_0(s_0)$ задается выражением **(3.2.10)**.

▷ **Пример 3.1.** ***Определение субоптимального распределения ресурсов.***

Найдем теперь субоптимальное решение для трехсекторной экономики, заданной экзогенными параметрами, значения которых приведены в § 2.2:

$$A_0 = 6{,}19,\quad \alpha_0 = 0{,}46,\quad A_1 = 1{,}35,\quad \alpha_1 = 0{,}68,\quad A_2 = 2{,}71,\quad \alpha_2 = 0{,}49,$$

$$a_0 = 0{,}39,\quad a_1 = 0{,}29,\quad a_2 = 0{,}52,\quad \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}05.$$

Сначала по формулам **(3.1.9)** находим значения коэффициентов B_i, $i = 0, 1, 2$:

$$B_0 = 710{,}4,\quad B_1 = 1498{,}4,\quad B_2 = 423{,}6,$$

а затем по формулам **(3.2.9)** определяем коэффициенты D_i, $i = 0, 1, 2$:

$$D_0 = 214{,}1,\quad D_1 = 93{,}8,\quad D_2 = 42{,}1.$$

Поэтому соотношение **(3.2.9)** примет вид:

$$214{,}1\cdot\left(\frac{\theta_0}{1-\theta_0}\right)^{0{,}54}\cdot s_0^{0{,}46} = 93{,}8\cdot(1-s_0)^{1{,}148} + 42{,}1\cdot(1-s_0)^{0{,}553}.$$

Разрешаем его относительно $\dfrac{\theta_0}{1-\theta_0}$:

$$\frac{\theta_0}{1-\theta_0} = \left[\frac{0{,}438\cdot(1-s_0)^{1{,}148} + 0{,}197\cdot(1-s_0)^{0{,}553}}{s_0^{0{,}48}}\right]^{1{,}852}$$

и, наконец, относительно θ_0:

$$\theta_0(s_0) = \frac{1}{1+\left[\dfrac{s_0^{0{,}48}}{0{,}438\cdot(1-s_0)^{1{,}148} + 0{,}197\cdot(1-s_0)^{0{,}553}}\right]^{1{,}852}}.$$

Прямым счетом находим значения максимизируемой функции $g(s_0) = [1-\theta_0(s_0)](1-s_0)^{1{,}656}$ в задаче **(3.2.11)**. Эти значения представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2. ***Значения максимизируемой функции***

s_0	0,10	0,20	0,28	0,29	0,30	0,40
$g(s_0)$	0,218	0,317	0,352	0,353	0,346	0,330

Из табл. 3.2 видно, что максимальное значение функция $g(s_0)$ достигает при $s_0^* = 0{,}29$, поэтому $\theta_0^* = \theta_0(s_0^*) = 0{,}40$, и по формулам (**3.2.13**) полностью определяются координаты субоптимального решения:

$$\begin{array}{lll} \theta_0^* = 0,40, & \theta_1^* = 0,49, & \theta_2^* = 0,31, \\ s_0^* = 0,29, & s_1^* = 0,48, & s_2^* = 0,23. \end{array} \qquad \textbf{(3.2.14)}$$

В 1989—1991 гг. экономика РФ характеризовалась следующим фактическим распределением ресурсов:

- $\theta_0 = 0,23, \quad \theta_1 = 0,16, \quad \theta_2 = 0,61 \quad (1991);$
- $s_0 = 0,47, \quad s_1 = 0,14, \quad s_2 = 0,39 \quad (1989).$

Как видим, материальный сектор был недостаточно трудообеспечен, что компенсировалось большими капиталовложениями, ресурсообеспеченность фондосоздающего сектора была существенно ниже оптимальной, в то время как ресурсообеспеченность потребительского сектора — гораздо выше оптимальной, особенно в части трудовых ресурсов. ▶

3.3. Исследование сбалансированных стационарных состояний

В § 3.1, 3.2 было показано, что стационарное состояние трехсекторной экономики характеризуется 15 параметрами, которые связаны шестью натурально-стоимостными балансами.

Используя только натуральные балансы, можно выявить технологически возможные сбалансированные стационарные состояния трехсекторной экономики на всем диапазоне изменения параметров распределения трудовых и инвестиционных ресурсов. Добавляя к натуральным стоимостные балансы, можно выяснить экономические возможности достижения наиболее предпочтительных из технологически сбалансированных состояний.

Чем ближе состояние к технологическому оптимуму, существование которого было доказано в § 3.2, тем оно предпочтительнее. Движение к технологическому оптимуму от начального (текущего) состояния осуществляется по некоторой траектории (в пространстве параметров распределения ресурсов), на которой выполнены натуральные балансы (т.е. трудовой, инвестиционный и материальный). Роль времени на такой траектории выполняет один из параметров распределения ресурсов, принятый за свободный.

Ниже рассматривается т р и варианта таких траекторий:

1) с фиксированным распределением инвестиционных ресурсов (свободный параметр — θ_2);

2) с фиксированным распределением трудовых ресурсов (свободный параметр — s_2);

3) с одинаковыми пропорциями в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов (свободный параметр — s_1).

Динамика сбалансированных состояний по труду и материалам

Исследуется вся картина сбалансированного изменения состояний трехсекторной экономики по труду и материалам при фиксированном распределении инвестиционных товаров (s_0, s_1, s_2), $s_i > 0$, $s_0 + s_1 + s_2 = 1$. Таким образом, любое состояние из рассматриваемого множества удовлетворяет всем трем натуральным балансам, но один баланс рассматривается в статике, а два — в динамике.

Эти состояния определяются двумя уравнениями трудового и материального балансов:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \qquad \theta_i \geq 0, \\ &(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.3.1}$$

поэтому из трех параметров распределения труда θ_0, θ_1, θ_2 свободно может меняться только один (далее примем за свободную переменную θ_2).

Если производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа, то удельные выпуски секторов примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0}, \\ &x_1 = B_1 \theta_1, \\ &x_2 = B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.3.2}$$

где $B_0 = A_0 A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1}} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1}}$,

$$B_1 = A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{-\frac{1}{1-\alpha_1}} s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}},$$

$$B_2 = A_2 A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_2^{-\alpha_2} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}} s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}.$$

Из соотношений **(3.3.2)** находим дифференциалы удельных выпусков:

$$\left.\begin{aligned} &dx_0 = x_0 \left[(1-\alpha_0) \frac{d\theta_0}{\theta_0} + \alpha_0 \frac{d\theta_1}{\theta_1} \right], \\ &dx_1 = x_1 \frac{d\theta_1}{\theta_1}, \\ &dx_2 = x_2 \left[(1-\alpha_2) \frac{d\theta_2}{\theta_2} + \alpha_2 \frac{d\theta_1}{\theta_1} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.3}$$

В дифференциалах уравнения **(3.3.1)** запишутся в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &d\theta_0 + d\theta_1 + d\theta_2 = 0, && (1)\\ &(1-a_0)dx_0 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2. && (2)\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(3.3.4)}$$

Подставляя выражения **(3.3.3)** во второе уравнение системы **(3.3.4)**, получим:

$$(1-\alpha_0)x_0\left[(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\alpha_0\frac{d\theta_1}{\theta_1}\right]=$$

$$=a_1x_1\frac{d\theta_1}{\theta_1}+a_2x_2\left[(1-\alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2}+\alpha_2\frac{d\theta_1}{\theta_1}\right].$$

Последнее равенство после деления обеих его частей на $(1 - a_0)x_0$ и приведения подобных членов принимает вид:

$$(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}+(\alpha_0-\delta_1-\alpha_2\delta_2)\frac{d\theta_1}{\theta_1}=(1-\alpha_2)\delta_2\frac{d\theta_2}{\theta_2},$$

где $\delta_i=\dfrac{a_ix_i}{(1-a_0)x_0}$ — доля i-го сектора ($i = 1, 2$) в производственном потреблении товарной продукции материального сектора ($\delta_1 + \delta_2 = 1$).

Таким образом, система **(3.3.4)** приобрела следующую форму:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\theta_1\frac{d\theta_1}{\theta_1}=-\theta_2\frac{d\theta_2}{\theta_2},\\ &\frac{d\theta_0}{\theta_0}-(1-\Delta)\frac{d\theta_1}{\theta_1}=\Delta\frac{d\theta_2}{\theta_2},\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(3.3.5)}$$

где $\Delta=\dfrac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2$ — скорректированная доля потребительского сектора в использовании товарной продукции материального сектора.

Далее примем, что потребительский сектор имеет технологический уровень не меньше, чем материальный, т.е. $\alpha_2 \geq \alpha_0$ (см. также § 2.2), поэтому

$$\Delta \leq \delta_2 \leq 1.$$

Уравнения **(3.3.5)** имеют следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\theta_0}{\theta_0}=\frac{\Delta-\theta_2-\theta_0\Delta}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}=\frac{g_0}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2},\\ &\frac{d\theta_1}{\theta_1}=-\frac{\theta_2+\theta_0\Delta}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}=-\frac{g_1}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2},\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(3.3.6)}$$

где $g_0 = \Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta$, $g_1 = \theta_2 + \theta_0\Delta$, $g_2 = 1 - \theta_2 - \theta_0\Delta$.

Поскольку параметры распределения труда θ_0, θ_1, θ_2 связаны двумя соотношениями **(3.3.1)**, то переменные θ_0, θ_1 являются функциями свободной переменной θ_2 ($\theta_0 = \theta_0(\theta_2)$, $\theta_1 = \theta_1(\theta_2)$), поэтому и функции g_0, g_1, g_2 в решении **(3.3.6)** также являются функциями θ_2.

Свободная переменная θ_2 меняется в диапазоне

$$0 \le \theta_2 \le 1,$$

где $\theta_2 = 0$ характеризует состояние экономики как «производство для производства» (производство предметов потребления отсутствует), а $\theta_2 = 1$ соответствует $\theta_1 = 0$, что означает полное отсутствие фондосоздающего производства, при этом $\theta_0 = 0, x_i = 0, \ i = 0, 1, 2$, т.е. это ситуация отсутствия какого-либо производства вообще.

Характер изменений θ_0, θ_1 на всем диапазоне изменения свободной переменной θ_2 определяется знаками функций $g_0(\theta_2)$, $g_1(\theta_2)$, $g_2(\theta_2)$. Поскольку

$$g_1(\theta_2) = \theta_1(\theta_2) + \theta_0(\theta_2)\Delta(\theta_2) \ge 0,$$

$$g_2(\theta_2) = 1 - \theta_2 - \theta_0(\theta_2)\Delta(\theta_2) \ge 1 - \theta_2 - \theta_0(\theta_2) = \theta_1(\theta_2) \ge 0,$$

то $d\theta_1$ всегда имеет противоположный знак по отношению к $d\theta_2$.

Поскольку $g_0(0) = 0$, $g_0'(0) = +\infty$, $g_0(1) = -(1 - \Delta) < 0$, но $g_0'(1)$ может иметь как положительный, так и отрицательный знак, то имеется два варианта поведения функции $g_0(\theta_2)$ (рис. 3.1, 3.2).

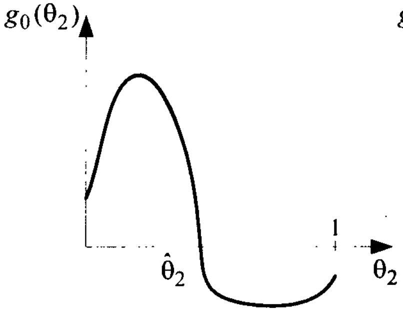

Рис. 3.1. Поведение функции $g_0(\theta_2)$ *при* $g_0'(1) > 0$

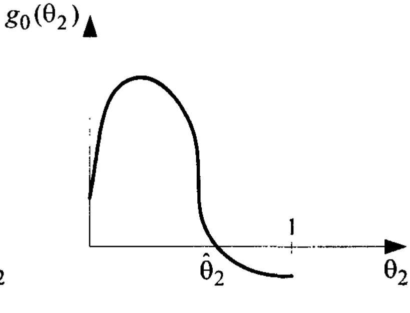

Рис. 3.2. Поведение функции $g_0(\theta_2)$ *при* $g_0'(1) < 0$

В обоих вариантах функция $g_0(\theta_2)$ в некоторой точке $\hat{\theta}_2$ обращается в нуль, т.е. это точка перемены знака функции с положительного на отрицательный. В точке $\hat{\theta}_2$ выполняется следующее условие ($\Delta = \Delta(\hat{\theta}_2)$, $\theta_0 = \theta_0(\hat{\theta}_2)$):

$$\hat{\theta}_2 = \Delta(1 - \theta_0),$$

т.е. после выделения материальному сектору доли труда $\theta_0 = \theta_0(\hat{\theta}_2)$ оставшаяся доля $1 - \theta_0$ распределяется между фондосоздающим и потребительским секторами таким образом, что доля потребительского сектора равна его скорректированной доле Δ в распределении товарной продукции материального сектора.

Все это дает основание считать точку $\hat{\theta}_2$ границей между трудонедостаточной и трудоизбыточной областями потребительского сектора: при $\theta_2 < \hat{\theta}_2$ $(\theta_2 < \Delta(1 - \theta_0))$ потребительский сектор трудонедостаточен, а при $\theta_2 > \hat{\theta}_2$ $(\theta_2 > \Delta(1 - \theta_0))$ — трудоизбыточен.

Таким образом, если потребительский сектор трудонедостаточен $(\theta_2 < \hat{\theta}_2,\ g_0(\theta_2) > 0)$, то согласно **(3.3.6)** при $d\theta_2 > 0$ происходит перелив труда из фондосоздающего в материальный и потребительский секторы. Если же потребительский сектор трудодостаточен, то при $d\theta_2 > 0$ донорами потребительского сектора становятся и материальный, и фондосоздающий секторы.

Подставив решение **(3.3.6)** в соотношения **(3.3.3)**, получим:

$$\left.\begin{aligned} dx_0 &= \frac{u_0 x_0}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \qquad u_0 = g_0 - \alpha_0 \Delta, \\ dx_1 &= -\frac{g_1 x_1}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \\ dx_2 &= \frac{u_2 x_2}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \qquad u_2 = g_2 - \alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.7}$$

Динамика сбалансированных состояний по инвестиционным товарам и материалам

Исследуется вся картина сбалансированного изменения состояний трехсекторной экономики по инвестиционным товарам и материалам при фиксированном распределении труда θ_0, θ_1, θ_2, $\theta_i > 0$, $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$. Таким образом, любое состояние из рассматриваемого множества удовлетворяет всем трем натуральным балансам, но один баланс рассматривается в статике, а два — в динамике. Эти состояния определяются двумя уравнениями:

$$\begin{cases} s_0 + s_1 + s_2 = 1, \ \ s_i \geq 0, \\ (1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \end{cases} \tag{3.3.8}$$

поэтому из трех параметров s_0, s_1, s_2 распределения инвестиционных ресурсов может свободно меняться только один (далее примем за свободную переменную s_2).

Если производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа, то удельные выпуски секторов будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B_0 s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1}}, \\ x_1 &= B_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_2 &= B_2 s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.3.9}$$

где $B_0 = A_0 A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_0}} \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0}$,

$B_1 = A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{-\frac{1}{1-\alpha_1}} \theta_1$,

$B_2 = A_2 A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_2^{-\alpha_2} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}} \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2}$.

Из соотношений **(3.3.9)** находим дифференциалы удельных выпусков:

$$\left.\begin{aligned} dx_0 &= x_0\left[\alpha_0 \frac{ds_0}{s_0} + \frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right], \\ dx_1 &= x_1 \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}, \\ dx_2 &= x_2\left[\alpha_2 \frac{ds_2}{s_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.10}$$

В дифференциалах уравнения **(3.3.8)** запишутся в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &ds_0 + ds_1 + ds_2 = 0, && (1) \\ &(1-a_0)dx_0 = a_1 dx_1 + a_2 dx_2. && (2) \end{aligned}\right\} \tag{3.3.11}$$

Подставляя выражения **(3.3.10)** во второе уравнение системы **(3.3.11)**, получим:

$$(1-a_0)\, x_0\left[\alpha_0 \frac{ds_0}{s_0} + \frac{\alpha_1\alpha_0}{(1-\alpha_1)}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right] =$$

$$= a_1 x_1 \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1} + a_2 x_2\left[\alpha_2 \frac{ds_2}{s_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{(1-\alpha_1)}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right].$$

Последнее равенство после деления обеих его частей на $(1 - a_0)x_0$ и приведения подобных членов принимает вид:

$$\alpha_0 \frac{ds_0}{s_0} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}(\alpha_2\delta_2 - \alpha_0 - \delta_1)\frac{ds_1}{s_1} = \alpha_2\delta_2 \frac{ds_2}{s_2}.$$

Таким образом, система **(3.3.11)** приобрела следующую окончательную форму:

$$\left.\begin{aligned} & s_0 \frac{ds_0}{s_0} + s_1 \frac{ds_1}{s_1} = -s_2 \frac{ds_2}{s_2}, \\ & \alpha_0 \frac{ds_0}{s_0} - \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)}(\alpha_0 - \delta_1 - \alpha_2\delta_2)\frac{ds_1}{s_1} = \alpha_2\delta_2 \frac{ds_2}{s_2}. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.3.12)}$$

Уравнения **(3.3.12)** имеют следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{ds_0}{s_0} = \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2 s_1\delta_2 - \alpha_1 s_2(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)}{\alpha_1 s_0(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)} \cdot \frac{ds_2}{s_2} = \frac{q_0}{q_2} \cdot \frac{ds_2}{s_2}, \\ & \frac{ds_1}{s_1} = \frac{(1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0\delta_2 + \alpha_0 s_2)}{\alpha_1 s_0(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)} \cdot \frac{ds_2}{s_2} = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{ds_2}{s_2}, \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.3.13)}$$

где $q_0 = (1-\alpha_1)\alpha_2 s_1\delta_2 - \alpha_1 s_2(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)$;

$q_1 = (1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0\delta_2 + \alpha_0 s_2)$;

$q_2 = \alpha_1(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)s_0 + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1$.

Поскольку параметры распределения инвестиционных товаров связаны двумя соотношениями **(3.3.8)**, то переменные s_0, s_1 являются функциями свободной переменной s_2, поэтому и функции q_0, q_1, q_2 в решении **(3.3.13)** являются функциями s_2.

Свободная переменная s_2 меняется в диапазоне

$$0 \le s_2 \le 1,$$

где $s_2 = 0$ характеризует состояние экономики как «производство для производства» (производство предметов потребления отсутствует), а $s_2 = 1$ соответствует $s_1 = 0$, что означает ситуацию «деиндустриализация, полный коллапс фондосоздающего производства», полное отсутствие всякого производства вообще.

Характер изменений s_0, s_1 на всем диапазоне изменения свободной переменной s_2 определяется знаками функций $q_0(s_2)$, $q_1(s_2)$, $q_2(s_2)$.

Поскольку $\delta_1(0) = 1$, $\delta_2(0) = 0$, $\delta_1(1) = 0$, $\delta_2(1) = 1$, то $q_2(0) = \alpha_1(1-\alpha_0)s_0^0 + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1^0 > 0$ $(s_0^0 = s_0(0),\ s_1^0 = s_1(0))$, $q_2(1) = 0$, поэтому $q_1(s_2) \ge 0$.

Поскольку $q_0(0) = 0$, $q_0'(0) = +\infty$, $q_0(1) = -\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_0) < 0$, то знак $q_0'(1)$ может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому в некоторой точке $\hat{s}_2$ $q_0(\hat{s}_2) = 0$. Как видим, функции $q_0(s_2)$, $q_1(s_2)$, $q_2(s_2)$ имеют характер изменения на интервале $0 \le s_2 \le 1$, что и $g_0(\theta_2)$, $g_1(\theta_2)$, $g_2(\theta_2)$ на интервале $0 \le \theta_2 \le 1$. Итак, при $0 \le s_2 < \hat{s}_2$ $(q_0(\hat{s}_2) = 0)$ и $ds_2 > 0$ доля фондосоздающего сектора в расходе инвестиционных товаров сокращается, материального и потребительского — возрастает, а при $\hat{s}_2 < s_2 < \bar{s}_2$ и $ds_2 > 0$ доля потребительского возрастает за счет сокращения долей материального и фондосоздающего секторов.

Динамика сбалансированных состояний с одинаковыми пропорциями в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов

Этот случай представляет особый интерес по двум причинам: 1) в такой ситуации наиболее четко видна уникальная роль фондосоздающего сектора в развитии всей экономики; 2) в этом случае удается в явном виде найти зависимости удельных выпусков секторов от свободной переменой s_1 и, следовательно, установить всю картину изменения производства в зависимости от доли ресурсов, направляемых в фондосоздающий сектор.

Одинаковость пропорций означает, что для каждого сектора его доли в трудовых и инвестиционных ресурсах одинаковы (поэтому можно будет говорить о доле каждого сектора в ресурсах, имея в виду и трудовые, и инвестиционные):

$$\theta_i = s_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Поскольку свободная переменная s_1 — доля фондосоздающего сектора в ресурсах, то остаточная доля $1 - s_1$ приходится на материальный и потребительский секторы. Обозначив через h долю потребительского сектора в остаточных ресурсах, приходим к следующему распределению трудовых и инвестиционных ресурсов:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0 = (1-h)(1-s_1), \quad \theta_1 = s_1, \quad \theta_2 = h(1-s_1), \\ &s_0 = (1-h)(1-s_1), \quad s_1, \quad s_2 = h(1-s_1). \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.3.14)}$$

Распределение **(3.3.14)** удовлетворяет по построению трудовому и инвестиционному балансам, а надлежащим выбором h, как показано ниже, можно добиться выполнения и материального баланса. При распределении **(3.3.14)** удельные выпуски секторов соответственно равны:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B_0(1-h)(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}, \\ x_1 &= B_1 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \\ x_2 &= B_2 h(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.3.15)}$$

Подставив значения удельных выпусков в уравнение материального баланса, получим следующее линейное уравнение относительно h:

$$(1-a_0)B_0(1-h)(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} = a_1 B_1 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + a_2 B_2 h(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}},$$

решение которого имеет вид:

$$h(s_1) = \frac{1 - b_1 s_1^{\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}}(1-s_1)^{-1}}{1 + b_2 s_1^{\frac{\alpha_2-\alpha_0}{1-\alpha_1}}}, \qquad \textbf{(3.3.16)}$$

где $b_i = \dfrac{a_i B_i}{(1-a_0)B_0}$, $\quad i = 1, 2.$

Функция $h(s_1)$ убывает, начиная со значения $h(0) = 1$ и кончая нулевым значением в точке $\overline{s}_1$, определяемой из уравнения

$$b_1 s_1^{\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}} = 1 - s_1. \qquad \textbf{(3.3.17)}$$

Подставив решение **(3.3.16)** в выражения **(3.3.15)** удельных выпусков секторов, получим удельные выпуски как функции от свободной переменной s_1 в сбалансированных стационарных состояниях экономики:

$$\left.\begin{aligned} x_0(s_1) &= B_0 \frac{b_1 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + b_2(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}}{1 + b_2 s_1^{\frac{\alpha_2-\alpha_0}{1-\alpha_1}}}, \\ x_1(s_1) &= B_1 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \\ x_2(s_1) &= B_2 \frac{(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} - b_1 s_1^{\frac{1+\alpha_2-\alpha_0}{1-\alpha_1}}}{1 + b_2 s_1^{\frac{\alpha_2-\alpha_0}{1-\alpha_1}}}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.3.18)}$$

▷ **Пример 3.2.** ***Траектории удельных выпусков секторов.*** Подставив данные примера 3.1 в формулы **(3.3.14)**, **(3.3.16)**, **(3.3.18)**, получим общую картину сбалансированного изменения удельных выпусков секторов в зависимости от доли ресурсов s_1, направляемых в фондосоздающий сектор (табл. 3.3, рис. 3.3, 3.4).

Таблица 3.3. ***Доли секторов в ресурсах и удельные выпуски секторов (тыс. руб./чел.)***[1]

s_1	0	0,10	0,20	0,30	0,36	0,37	0,38	0,40	0,50	0,55	0,59
h	1	0,69	0,64	0,56	0,50	0,48	0,47	0,44	0,26	0,13	0
s_0	0	0,28	0,29	0,31	0,32	0,33	0,33	0,34	0,37	0,39	0,41
s_2	1	0,62	0,51	0,39	0,32	0,30	0,29	0,26	0,13	0,06	0
x_0	0	7,10	20,40	38,80	53,00	55,60	58,40	64,10	97,50	117,90	136,30
x_1	0	1,10	9,80	34,80	61,50	67,00	72,90	85,50	171,80	231,30	288,10
x_2	0	7,70	18,40	26,20	27,90	28,00	27,90	27,50	18,80	9,80	0

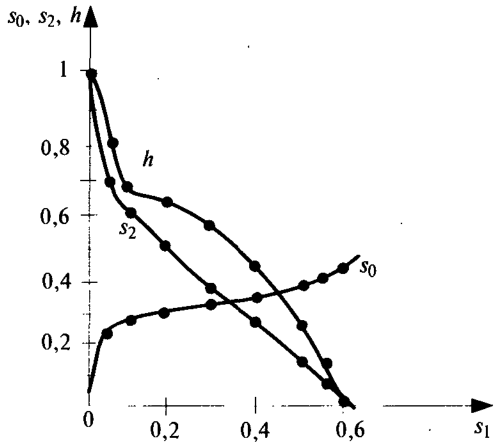

Рис. 3.3. ***Изменение долей (в ресурсах) материального и потребительского секторов***

Из табл. 3.3 и графиков на рис. 3.4 видно, что при движении по траектории с одинаковыми пропорциями в распределении ресурсов в направлении возрастания доли s_1 фондосоздающего сектора в ресурсах происходит быстрое возрастание удельных выпусков средств производства, в то время как удельное производство предметов по-

[1] В ценах 1983 г.

требления сначала сравнительно медленно растет вплоть до достижения максимального значения при $s_1^* = 0,37$, после чего начинается его ускоряющееся падение, которое завершается достижением нулевого уровня при $\bar{s}_1 = 0,59$ (ситуация «производство для производства»).

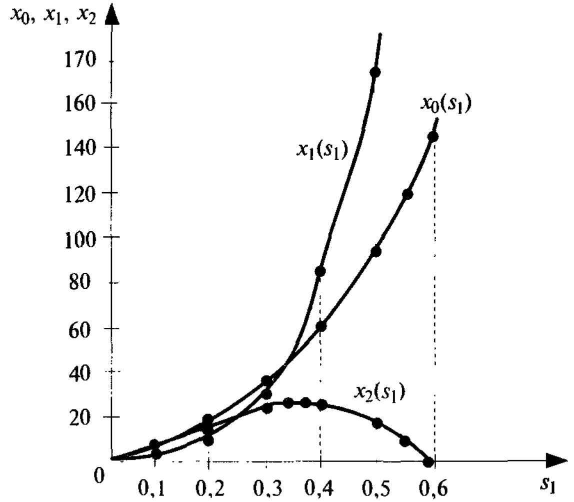

Рис. 3.4. ***Изменение удельных выпусков секторов*** (тыс. руб./чел.)

Таблица 3.4. ***Прирост производства средств производства, обеспечивающий прирост производства предметов потребления на 1 руб. (руб.)***

s_1	0	0,1	0,2	0,3	0,37
Δx_2	—	7,7	10,7	7,8	1,80
$\Delta x_0 + \Delta x_1$	—	8,2	22,0	43,4	49,0
$\dfrac{\Delta x_0 + \Delta x_1}{\Delta x_2}$	—	1,1	2,1	5,6	27,2

Однако из практических соображений достигать оптимального состояния $s_1^* = 0,37$ нецелесообразно, так как при движении к s_1^*, начиная с $s_1 = 0$, каждый новый рубль прироста удельного выпуска предметов потребления требует все большего прироста удельного выпуска средств производства, что видно из табл. 3.4. ▶

Альтернативный способ определения технологического оптимума

Как отмечалось выше, шесть структурных переменных $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, $s = (s_0, s_1, s_2)$ связаны тремя натуральными балансами, поэтому в их изменении имеется три степени свободы. Технологический оптимум определяется в результате решения задачи нелинейного программирования **(3.2.1)–(3.2.5)**. В § 3.2 было найдено субоптимальное решение этой задачи.

Альтернативный способ определения технологического оптимума состоит в сведéнии задачи нелинейного программирования к задаче на безусловный экстремум и базируется на следующей форме распределения ресурсов:

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_0 = (1-lh)(1-\theta_1), & \theta_1, & \theta_2 = lh(1-\theta_1), \\ s_0 = (1-h)(1-s_1), & s_1, & s_2 = h(1-s_1), \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.3.19)}$$

где h — доля потребительского сектора в инвестиционных ресурсах, доставшихся материальному и потребительскому секторам, $0 < h < 1$;

l — относительная трудообеспеченность инвестиционных ресурсов, направляемых в потребительский сектор, $0 < l < \dfrac{1}{h}$.

Распределение **(3.3.19)** при фиксированных значениях (l, h) удовлетворяет трудовому и инвестиционному балансам. Подбором h можно добиться выполнения и материального баланса. При такой форме распределения роль свободных переменных выполняют l, θ_1, s_1.

В случае распределения **(3.3.19)** удельные выпуски секторов примут вид:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = B_0(1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_1 = B_1\theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_2 = B_2 l^{1-\alpha_2}h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}, \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.3.20)}$$

поэтому материальный баланс приобретет следующую форму:

$$(1-a_0)B_0(1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} =$$

$$= a_1B_1\theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + a_2B_2 l^{1-\alpha_2}h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}. \qquad \textbf{(3.3.21)}$$

Таким образом, в случае распределения **(3.3.19)** задача определения технологического оптимума сводится к следующей задаче: найти

$$\max_{\{l,\theta_1,s_1\}} B_2 l^{1-\alpha_2} h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}} \tag{3.3.22}$$

при выполнении материального баланса **(3.3.21)** и условий $0 \le \theta_1 \le 1$, $0 \le s_1 \le 1$, $0 < l < \dfrac{1}{h}$.

Если при $h = 0$ левая часть **(3.3.21)** превышает правую, т.е.

$$(1-a_0)B_0(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} > a_1 B_1\theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}},$$

то уравнение материального баланса **(3.3.21)** имеет единственное решение

$$h = h(l,\ \theta_1,\ s_1), \tag{3.3.23}$$

поскольку левая часть монотонно убывает, а правая часть линейно возрастает с ростом h.

Подставив зависимость **(3.3.23)** в функцию цели, приходим к следующей задаче на безусловный максимум:

$$\max_{\left\{0\le\theta_1\le 1,\ 0\le s_1\le 1,\ 0<l<\frac{1}{h}\right\}} g(l,\theta_1,s_1), \tag{3.3.24}$$

где $g(l,\theta_1,s_1) = B_2 l^{1-\alpha_2} h(l,\theta_1,s_1)(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}$.

Для решения последней задачи применяем обычные необходимые условия безусловного экстремума:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial l} &= \frac{\partial x_2}{\partial l} + \frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial l} = 0,\\
\frac{\partial g}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = 0,\\
\frac{\partial g}{\partial s_1} &= \frac{\partial x_2}{\partial s_1} + \frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s_1} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.25}$$

Частные производные остаточной доли h определяем по уравнению материального баланса:

$$-(1-a_0)x_0\left[\frac{(1-\alpha_0)(h+l\dfrac{\partial h}{\partial l})}{1-lh}+\frac{\alpha_0}{1-h}\cdot\frac{\partial h}{\partial l}\right]=a_2x_2\left[\frac{1-\alpha_2}{l}+\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial l}\right],$$

$$(1-a_0)x_0\left[-\frac{(1-\alpha_0)l}{1-lh}\cdot\frac{\partial h}{\partial\theta_1}-\frac{\alpha_0}{1-h}\cdot\frac{\partial h}{\partial\theta_1}-\frac{1-\alpha_0}{1-\theta_1}+\frac{\alpha_0}{\theta_1}\right]=$$
$$=\frac{a_1x_1}{\theta_1}+a_2x_2\left[\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial\theta_1}-\frac{1-\alpha_2}{1-\theta_1}+\frac{\alpha_2}{\theta_1}\right],$$

$$(1-a_0)x_0\left[-\frac{(1-\alpha_0)l}{1-lh}\cdot\frac{\partial h}{\partial s_1}-\frac{\alpha_0}{1-h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s_1}-\frac{1-\alpha_0}{1-s_1}+\frac{\alpha_0\alpha_1}{(1-\alpha_1)s_1}\right]=$$
$$=\frac{\alpha_1a_1x_1}{(1-\alpha_1)s_1}+a_2x_2\left[\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s_1}-\frac{\alpha_2}{1-s_1}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(1-\alpha_1)s_1}\right],$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial l}&=-\frac{h(1-h)\left[(1-\alpha_0)lh(1-a_0)x_0+(1-\alpha_2)(1-lh)a_2x_2\right]}{l\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},\\
\frac{\partial h}{\partial\theta_1}&=-\frac{h(1-h)(1-lh)\left[(\alpha_0-\theta_1)(1-a_0)x_0-(1-\theta_1)a_1x_1-(\alpha_2-\theta_1)a_2x_2\right]}{\theta_1(1-\theta_1)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},\\
\frac{\partial h}{\partial s_1}&=-\frac{h(1-h)(1-lh)\left[\alpha_0(\alpha_1-s_1)(1-a_0)x_0-\alpha_1(1-s_1)a_1x_1-\alpha_2(\alpha_1-s_1)a_2x_2\right]}{(1-\alpha_1)s_1(1-s_1)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]}.
\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(3.3.26)}$$

Поскольку $(1-a_0)x_0-a_1x_1-a_2x_2=0$ и $\alpha_0<\alpha_1$, $\alpha_0<\alpha_2$, то из **(3.3.26)** вытекает, что, по крайней мере, при $l<\dfrac{1}{h}$, $\theta_1\le\alpha_2$, $s_1\le\alpha_1$,

$$\frac{\partial h}{\partial l}<0,\quad\frac{\partial h}{\partial\theta_1}<0,\quad\frac{\partial h}{\partial s_1}<0.\qquad\textbf{(3.3.27)}$$

Подставив найденные значения производных в **(3.3.25)**, получим следующие уравнения для определения координат точки технологического оптимума:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{(1-\alpha_2)x_2}{l}-\frac{x_2(1-h)[(1-\alpha_0)lh(1-a_0)x_0+(1-\alpha_0)(1-lh)a_2x_2]}{l\,[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2]}=0, && (1)\\
&\frac{(\alpha_2-\theta_1)x_2}{\theta_1(1-\theta_1)}+\frac{x_2(1-h)(1-lh)}{\theta_1(1-\theta_1)}\times\\
&\times\frac{[(\alpha_0-\theta_1)(1-a_0)x_0-(1-\theta_1)a_1x_1-(\alpha_2-\theta_1)a_2x_2]}{[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2]}=0, && (2)\\
&\frac{\alpha_2(\alpha_1-s_1)x_2}{s_1(1-s_1)}+\frac{x_2(1-h)(1-lh)}{s_1(1-s_1)}\times\\
&\times\frac{[\alpha_0(\alpha_1-s_1)(1-a_0)x_0-\alpha_1(1-s_1)a_1x_1-\alpha_2(\alpha_1-s_1)a_2x_2]}{[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2]}=0. && (3)
\end{aligned}
\right\}
\quad \textbf{(3.3.28)}
$$

Полученная система уравнений **(3.3.28)** нелинейна относительно неизвестных l, θ_1, s_1, поскольку удельные выпуски нелинейны относительно этих неизвестных. Однако в явном виде первое уравнение является линейной функцией относительно неизвестного l, второе уравнение — относительно θ_1, третье — относительно s_1. Воспользовавшись этим обстоятельством, разрешим каждое уравнение относительно соответствующей переменной:

$$
\left.
\begin{aligned}
l^* &= \frac{\alpha_0(1-\alpha_2)}{\alpha_2(1-\alpha_0)-(\alpha_2-\alpha_0)h}, && (1)\\
\theta_1^* &= \frac{\alpha_0+\alpha_2\varepsilon-\delta_1}{1+\varepsilon-\delta_1}, && (2)\\
s_1^* &= \alpha_1\frac{\alpha_0+\alpha_2\varepsilon-\delta_1}{\alpha_0+\alpha_2\varepsilon-\alpha_1\delta_1}, && (3)
\end{aligned}
\right\}
\quad \textbf{(3.3.29)}
$$

где $\varepsilon = \dfrac{h(\alpha-lh)}{(1-h)(1-lh)}$,

$\delta_1 = \dfrac{a_1x_1}{(1-a_0)x_0}$ — доля фондосоздающего сектора в расходе товарной продукции материального сектора.

Соотношения **(3.3.29)** — неявное решение уравнений **(3.3.28)**, во всяком случае, это эквивалентная форма данных уравнений, более пригодная для анализа. Например, из первого соотношения **(3.3.29)** следует, что $l^* < 1$. Вместе с тем эта эквивалентная форма пригодна для построения итерационной процедуры поиска решения для каждого конкретного набора значений экзогенных параметров.

Следует обратить внимание на тот факт, что попытка начать итерационную процедуру со значений θ_1^0, s_1^0, l^0, значительно отличающихся от координат точки технологического оптимума, зачастую приводит к выходу за пределы допустимой области и прерыванию процедуры.

Чтобы избежать подобной ситуации, необходимо подобрать начальное значение как можно ближе к точке технологического оптимума. Для этого вначале продвигаемся по траектории с одинаковыми пропорциями в распределении ресурсов до точки локального максимума, которую и принимаем за начальную, после чего осуществляем итерационную процедуру последовательно по параметрам θ_1, s_1, l, как это показано в примере 3.3.

▷ **Пример 3.3.** ***Определение точки технологического оптимума альтернативным способом.*** Применим альтернативный способ определения технологического оптимума для тех же исходных данных, что и в примерах 3.1, 3.2.

В примере 3.2 был найден локальный максимум при движении по траектории с одинаковыми пропорциями при определении ресурсов. Координаты (свободные) точки локального максимума принимаем за начальные значения свободных переменных:

$$\theta_1^0 = s_1^0 = 0,37, \quad l^0 = 1.$$

При этих значениях свободных переменных удельные выпуски равны ($h^{(0)} = 0,48$):

$$x_0^{(0)} = 55,6, \quad x_1^{(0)} = 67,0, \quad x_2^{(0)} = 28,0,$$

поэтому

$$\delta_1^0 = \frac{a_1 x_1^0}{(1-a_0)x_0^0} = 0,42, \quad \varepsilon^{(0)} = \frac{h^{(0)}}{1-h^{(0)}} = 0,938.$$

По формулам **(3.3.29)** находим

$$\theta_1^{(1)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \varepsilon^{(0)} - \delta_1^{(0)}}{1 + \varepsilon^{(0)} - \delta_1^{(0)}}$$

и далее последовательным применением этих формул приходим к глобальному максимуму уже на 4-й итерации, как это показано в табл. 3.5 и на рис. 3.5 (цифрами указаны номера итераций).

Глобальный максимум достигается при следующих значениях свободных переменных:

$$l^* = 0,94, \quad 0_1^* = 0,25, \quad s_1^* = 0,45.$$

При этом $h = 0,5$, поэтому точка глобального максимума имеет следующие координаты:

$$\theta_0^* = 0,4, \quad \theta_1^* = 0,25, \quad \theta_2^* = 0,35,$$

$$s_0^* = 0,275, \quad s_1^* = 0,45, \quad s_2^* = 0,275.$$

Таблица 3.5. ***Значения свободных переменных и удельных выпусков по итерациям (тыс. руб./чел.)***

Номер итерации	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
l	1,000	1,000	1,000	1,000	0,94
θ_1	0,370	0,250	0,250	0,260	0,25
s_1	0,370	0,370	0,450	0,450	0,45
h	0,484	0,538	0,486	0,480	0,50
x_0	55,600	45,500	57,400	58,700	57,70
x_1	67,000	45,300	68,700	71,300	69,20
x_2	28,000	28,300	29,300	29,300	29,30
ε	0,938	1,164	0,946	0,923	—
δ_1	0,573	0,474	0,569	0,576	—

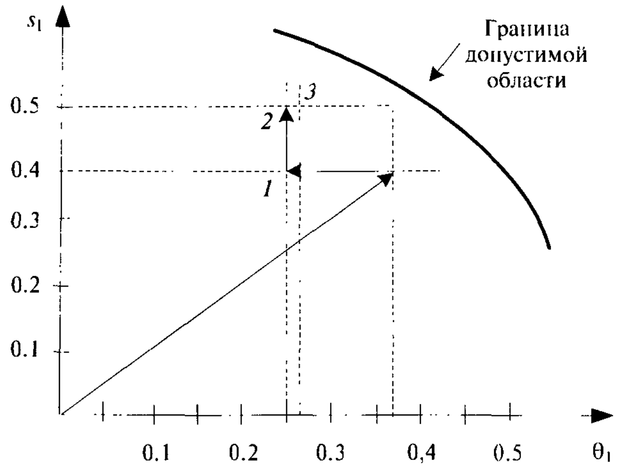

Рис. 3.5. ***Итерационное движение на плоскости*** (θ_1, s_1) ***в направлении точки глобального максимума***

Глобальный максимум равен 29,3 тыс. руб./чел., в то время как субоптимальное значение — 28,8 тыс. руб./чел. ▶

Из проведенного теоретического исследования стационарных сбалансированных состояний трехсекторной экономики и из примеров 3.1—3.3 видно, что удельные выпуски секторов как функции долей ресурсов θ_1, s_1, направляемых в фондосоздающий сектор, ведут себя следующим образом:

- удельные выпуски секторов, производящих средства производства, монотонно растут по каждой переменной;
- удельный выпуск предметов потребления по каждой переменной имеет локальный максимум, при этом вся поверхность удельного выпуска имеет куполообразный характер с пологими склонами.

Поэтому продвижение к точке глобального максимума сопровождается все бóльшими расходами (выпуском) средств производства на каждую новую единицу выпуска предметов потребления. Таким образом, нецелесообразно вплотную приближаться к точке глобального максимума. Однако знать эту точку необходимо для того, чтобы суметь определить направление наиболее целесообразного движения в пространстве свободных переменных.

Вопросы и задания

1. Почему субоптимальное решение задачи на максимум удельного выпуска предметов потребления, найденное в § 3.2, не является глобальным максимумом?
2. Изобразите на плоскости (θ_1, s_1) траекторию движения к субоптимальной точке.
3. Найдите локальный максимум удельного выпуска предметов потребления при движении в пространстве ресурсов по траектории с фиксированными пропорциями в долях ресурсов, направляемых в фондосоздающий сектор $\left(\dfrac{\theta_1}{s_1} = \gamma = \text{const},\ l = 1\right)$.
4. При $l = 1$ аналитически определите границу допустимой области на плоскости (θ_1, s_1).

4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В этой главе предпринимается попытка объяснить механизм возникновения и самоподдержания инфляции с помощью трехсекторной модели экономики.

В § 4.1 раскрывается сущность инфляции и описываются классические приемы ее исследования, основанные на главном макроэкономическом уравнении, согласно которому предложение денег и спрос на них находятся в динамическом равновесии. Это уравнение справедливо, когда экономика рассматривается как единое неструктурированное целое.

В последующих параграфах представлен подход автора к выявлению механизма инфляции в рамках трехсекторной модели экономики. В этом случае экономика структурирована, поэтому основное макроэкономическое уравнение распадается на три: баланс платежноспособного спроса и предложения потребительских товаров и два стоимостных баланса секторов, производящих средства производства. Кроме того, имеют место три натуральных баланса: трудовой, инвестиционный и материальный. Таким образом, картина явления получается более детализированной, а потому и более реалистичной. Исследование проводится в стационарном состоянии.

В § 4.2 исследуется один виток инфляции, разделенный на два полувитка. Началом первого полувитка служит повышение цен на потребительские товары, началом второго — повышение цен на средства производства. В § 4.3 устанавливаются условия, при выполнении которых инфляция усиливается, а при их размывании -- ослабляется и сходит на нет. В § 4.4 исследуется влияние инфляции на производство и потребление.

4.1. Модели макроспроса и предложения денег. Сущность инфляции

Под ***инфляцией*** понимается обесценивание денег, когда на ту же самую сумму некоторое время спустя можно купить меньше товара.

Инфляция возникает вследствие нарушения баланса между товарным и денежным потоками. Внешним признаком инфляции является непрерывный рост общего уровня цен, охватывающий все рынки и все товары, в течение достаточно длительного промежутка времени.

Для обеспечения баланса товаров и денег общая сумма денег в стране с учетом их оборачиваемости за год должна быть такова, чтобы можно было выкупить произведенные за год инвестиционные и потребительские товары (стоимость расходуемых материалов входит в стоимость упомянутых товаров), т.е. валовой внутренний продукт (ВВП). Именно это положение реализуется в основном макроэкономическом уравнении

$$Mv = pY, \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

где M — общая масса денег, находящихся в обращении;
v — скорость оборота денег за год;
p — общий уровень цен (например, индекс цен по отношению к ценам базового года);
Y — натуральное значение ВВП (например, ВВП в неизмененных ценах базового года).

Разумеется, необходимо учитывать выпуск облигаций, состояние рынка ценных бумаг, внешнюю торговлю. В таком случае соотношение **(4.1.1)** обычно записывается в форме

$$M = kpY, \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

где k — коэффициент, зависящий от скорости оборота денег (обратно пропорционально) и других перечисленных факторов.

При анализе инфляции обычно пользуются основным макроэкономическим уравнением в форме **(4.1.1)**. Для включения инфляционных процессов достаточно, чтобы совокупный спрос превосходил совокупное предложение. По источникам этого превышения инфляцию подразделяют на инфляцию спроса и инфляцию предложения.

Инфляция спроса возникает тогда, когда темпы роста совокупного спроса превышают темпы роста ВВП.

Увеличение совокупного спроса может произойти за счет роста ряда показателей, главными из которых являются фонд потребления, инвестиции, государственные расходы, чистый экспорт. Из уравнения **(4.1.1)** видно, что при увеличении левой части (как за счет роста скорости оборота денег, так и за счет увеличения денежной массы) правая часть при фиксированном объеме выпуска товаров Y может возрасти лишь за счет роста цен.

Известный монетарист М. Фридман по этому поводу писал, что инфляция — «денежный феномен, вызванный избытком денег по отношению к выпуску продукции». По представлениям другого монетариста А. Мельтцера, «средний темп инфляции устанавливается в зависимости от среднего темпа роста денежной массы, как это имеет место сейчас, так и повсюду в прошлом».

Инфляция предложения вызывается ростом издержек производства и, как следствие, сокращением совокупного предложения.

Два самых важных источника роста издержек — повышение номинальной заработной платы и увеличение цен на сырье и энергоносители. Если денежная масса и объем выпуска товаров остались неизменными, то единственным средством для обеспечения равенства **(4.1.1)** служит рост цен.

В реальной экономике два названных типа инфляции разделить нельзя, они присутствуют одновременно. Большинство экономистов придерживается следующей точки зрения на эти два типа инфляции. Инфляция спроса существует до тех пор, пока существуют чрезмерные общие расходы. Инфляция, вызванная ростом издержек, сама себя ограничивает и постепенно сходит на нет, поскольку сопровождается сокращением выпуска товаров и занятости, что уменьшает возможности дальнейшего увеличения издержек.

Что касается влияния инфляции на производство, то существуют две точки зрения на этот счет. Кейнсианцы считают, что контролируемая инфляция — источник роста. По мнению монетаристов, контролируемая инфляция вызывает краткосрочный рост производства, который потом сходит на нет. В основе и того и другого подходов лежит допущение, что поведение цен несколько запаздывает по отношению к изменению денежной массы.

Рассуждения кейнсианцев базируются на уравнении, вытекающем из условия максимума прибыли на национальном уровне:

$$p\frac{\partial F}{\partial K}=r, \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

где p — уровень цен;

$F(K,L)$ — производственная функция национальной экономики;

r — норма прибыли, примерно равная процентной ставке.

Если денег стало больше, то процентная ставка должна уменьшиться. Следовательно, при гипотезе инерционности цен должен согласно **(4.1.3)** уменьшиться предельный продукт капитала $\frac{\partial F}{\partial K}$, а для неоклассических производственных функций предельный продукт уменьшается, если капитал возрастает.

Таким образом, падение нормы прибыли приводит к падению предельного продукта капитала, что с необходимостью предполагает увеличение спроса на инвестиционные товары. Итак, сравнительно небольшое увеличение денежной массы (такое, что некоторое время сохраняется прежний уровень цен) приводит к росту спроса на инвестиционные товары и соответственно к росту производства и сокращению безработицы.

Рассуждения монетаристов базируются на основном макроэкономическом уравнении **(4.1.1)** и уравнении ценообразования (цены определяются объемом продукции, выпущенной месяц назад):

$$\pi - \pi_{-1} = \lambda(y_{-1} - y^E), \qquad (4.1.4)$$

где π, π_{-1} — темп прироста цен (уровень инфляции) в текущий и прошлый моменты времени;

$$y = \log Y, \quad y^E = \log Y^E,$$

Y, Y^E — текущий и установившийся объемы ВВП.

В логарифмах уравнение **(4.1.1)** с учетом $p = \log P$, $m = \log M$, $y = \log Y$ запишется в следующем виде:

$$p = m - y + \text{const}.$$

Взяв разность этих уравнений в смежные моменты времени, получим:

$$p - p_{-1} = m - m_{-1} - (y - y_{-1})$$

или

$$\pi = \dot{m} - (y - y_{-1}), \qquad (4.1.5)$$

где $\pi = (p - p_{-1})$ — темп роста цен, или уровень инфляции;

$\dot{m} = (m - m_{-1})$ — темп роста денежной массы.

Система уравнений **(4.1.4)**, **(4.1.5)** относительно π, y при $\lambda = 1$ имеет следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2}(\pi_{-1} + \dot{m} + y_{-1} - y^E), \\ y &= \frac{1}{2}(\dot{m} - \pi_{-1} + y_{-1} + y^E). \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.6)$$

Для исследования поведения экономической системы с учетом влияния инфляции на производство решенная система уравнений рассматривается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \pi_{-1} + y - y^E, \\ \pi &= \frac{1}{2}(\dot{m} + \pi_{-1} + y_{-1} - y^E). \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.7)$$

В установившемся состоянии $\dot{m} = 0$, $y = y_{-1} = y^E$, $\pi = 0$.

Пусть теперь $\dot{m} \neq 0$, т.е. каждый месяц печатается $\dot{m}M_{-1}$ денег, где M_{-1} — объем денежной массы в предыдущем месяце.

Результаты последовательного решения рекуррентной системы **(4.1.7)** приведены в табл. 4.1.

Таким образом, если исходить из основного макроэкономического уравнения **(4.1.1)** и уравнения ценообразования **(4.1.4)**, то увеличение денежной массы с постоянным темпом прироста $\dot{m}$ вначале приведет к краткосрочному росту производства и рассасыванию безработицы на фоне постепенно возрастающей инфляции, после чего объем производства и безработица вернутся на прежний установившийся уровень, а уровень инфляции станет равным темпу прироста денежной массы.

Таблица 4.1. ***Выпуск продукции и уровень инфляции при постоянном темпе прироста денежной массы*** $\dot{m}$

Номер периода	$\dot{m}$	π_{-1}	y_{-1}	π	y
0	0	0	y^E	0	y^E
1	$\dot{m}$	0	y^E	$\frac{\dot{m}}{2}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$
2	$\dot{m}$	$\frac{\dot{m}}{2}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$	$\dot{m}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$
3	$\dot{m}$	$\dot{m}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$	$\frac{5\dot{m}}{4}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{4}$
4	$\dot{m}$	$\frac{5\dot{m}}{4}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{4}$	$\frac{5\dot{m}}{4}$	y^E
В итоге	$\dot{m}$	$\dot{m}$	y^E	$\dot{m}$	y^E

4.2. Исследование инфляции с помощью трехсекторной модели экономики[1]

В 90-х гг. XX в. инфляционный процесс в Российской Федерации разворачивался в следующей последовательности: повышение цен на потребительские товары, после чего с некоторым лагом следовало повышение цен на средства производства, главным образом на топливо, электроэнергию, сырье. Цены на машины и оборудование также росли, хотя рост цен частично замедлялся в связи с возможностью импорта. К концу 1990-х гг. импульсы к новым виткам инфляции в основном стали исходить из топливно-энергетического комплекса: добыча топлива сокращалась и дорожала из-за ухудшений условий добычи и недостаточных инвестиций, а вывоз не сокращался, поэтому поступление энергетических ресурсов на внутренний рынок все время уменьшалось. Именно такая «спираль» инфляции, наблюдаемая в реальной жизни, положена в основу изложения.

Согласно нашему подходу, условия возникновения и самоподдержания инфляции изучаются в любом из возможных стационар-

[1] Приведенные в § 4.2—4.4 результаты получены автором.

ных сбалансированных состояний трехсекторной экономики, которые были изучены в гл. 3. Это равносильно предположению, что переходный процесс близок к завершению.

Напомним, что стационарное состояние трехсекторной экономики характеризуется 15 переменными:

- $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ — доли секторов в распределении трудовых ресурсов;
- (s_0, s_1, s_2) — доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов;
- $(p_0, p_1, p_2), (t_0, t_1, t_2)$ — цены и ставки налогов на продукцию секторов;
- w_0, w_1, w_2 — ставки заработной платы (удельные доходы) на одного занятого в секторах.

Эти 15 переменных связаны тремя натуральными балансами (трудовым, инвестиционным и материальным) и тремя стоимостными (балансы доходов и расходов секторов).

При исследовании инфляции распределение инвестиций предполагается постоянным, налоги в явном виде не рассматриваются, они включены в заработную плату, т.е. перераспределение доходов между производственной и непроизводственной сферами не моделируется.

При сделанных предположениях девять параметров (параметры распределения труда $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, цéны p_0, p_1, p_2 и ставки заработной платы w_0, w_1, w_2) связаны следующими п я т ь ю балансами в относительных показателях (баланс распределения инвестиций в соответствии с предположениями опущен, x_i, $i = 0, 1, 2$ — удельные выпуски секторов):

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, && (1)\\ &(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2, && (2)\\ &p_0(1 - a_0)x_0 = p_1 s_0 x_1 + w_0\theta_0, && (3)\\ &p_2 x_2 = w \quad (w = w_0\theta_0 + w_1\theta_1 + w_2\theta_2), && (4) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

где уравнение (1) — трудовой баланс;
уравнение (2) — материальный баланс;
уравнение (3) — баланс доходов и расходов фондосоздающего сектора;
уравнение (4) — баланс спроса и предложения.

Напомним, что в уравнениях **(4.2.1)** удельные выпуски секторов задаются выражениями:

$$x_0 = B_0(s)\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}, \quad x_1 = B_1(s)\theta_1, \quad x_2 = B_2(s)\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2},$$

где $B_i(s) = \dfrac{A_i}{\lambda_i^{\alpha_i}}\left(\dfrac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}} s_i^{\alpha_i} s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_i}{1-\alpha_1}}, \quad i = 0, 2; \quad B_1(s) = \left(\dfrac{A_1}{\alpha_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$

Уравнения **(4.2.1)** в дифференциалах (малых изменениях) примут следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ll} d\theta_0 + d\theta_1 + d\theta_2 = 0, & (1) \\ (1-a_0)dx_0 = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2, & (2) \\ (1-a_0)x_0\, dp_0 - s_0 x_1\, dp_1 = -p_0(1-a_0)dx_0 + p_1 s_0\, dx_1 + d(w_0\theta_0), & (3) \\ -a_1 x_1\, dp_0 + (1-s_1)x_1\, dp_1 = \left[p_0 a_1 - p_1(1-s_1)\right]dx_1 + d(w_1\theta_1), & (4) \\ x_2\, dp_2 = -p_2\, dx_2 + dw. & (5) \end{array}\right\} \quad \textbf{(4.2.2)}$$

Решение уравнений (1), (2) системы **(4.2.2)** достаточно подробно изучено в Приложении 2 и имеет следующий вид:

$$\frac{d\theta_0}{\theta_0} = \frac{g_0}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}, \quad \frac{d\theta_1}{\theta_1} = -\frac{g_1}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}, \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

где $\Delta = \dfrac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2, \quad \delta_i = \dfrac{a_i x_i}{(1-a_0)x_0}, \quad i = 1, 2, \quad \delta_1 + \delta_2 = 1.$

Используя **(4.2.3)**, найдем дифференциалы удельных выпусков секторов:

$$dx_0 = \frac{u_0 x_0}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}, \quad dx_1 = -\frac{g_1 x_1}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}, \quad dx_2 = \frac{u_2 x_2}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2},$$

где $u_0 = (1-\alpha_0)\Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta, \quad u_2 = 1 - \alpha_2 - \theta_2 - \theta_0\Delta.$

Подставив найденные выражения в **(4.2.2)**, получим:

$$\left.\begin{array}{l} (1-a_0)x_0 dp_0 - s_0 x_1 dp_1 = \dfrac{\Delta}{g_2}\left[w_0\theta_0 - (1-\alpha_0)p_0(1-a_0)x_0\right]\dfrac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0, \\ -a_1 x_1 dp_0 + (1-s_1)x_1 dp_1 = \theta_1 dw_1, \\ x_2 dp_2 = \dfrac{1}{g_2}\left[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2 x_2\right]\dfrac{d\theta_2}{\theta_2} + \theta_0 dw_0 + \theta_1 dw_1 + \theta_2 dw_2. \end{array}\right\} \quad \textbf{(4.2.4)}$$

Основу дальнейшего исследования составляют уравнения **(4.2.4)** и решения **(4.2.3)**, связывающие $d\theta_0, d\theta_1, d\theta_2$.

Рассмотрим один виток инфляции — повышение ставки заработной платы в потребительском секторе приводит к повышению цены на предметы потребления и тем самым к падению реальной заработной платы в материальном и фондосоздающем секторах. Для сохранения реальной заработной платы в этих секторах приходится повышать ставки заработной платы, что, в свою очередь, приводит к повышению цены на продукцию потребительского сектора и падению реальной заработной платы в нем (номинальная — постоянна). Для сохранения реальной заработной платы в потребительском секторе необходимо вновь поднимать ставку заработной платы, что означает начало нового витка инфляции.

При исследовании одного витка инфляции выделим д в а этапа:

1) повышение ставки заработной платы в потребительском секторе и реакция на это секторов (первый полувиток инфляции);

2) повышение ставок заработной платы в материальном и фондосоздающем секторах с целью сохранения реальной заработной платы и отражение этой акции на цене продукции потребительского сектора (второй полувиток инфляции).

Как видно из описания полувитков, инфляция не обязательно может начаться в потребительском секторе. Инициаторами ее могут быть и материальный, и фондосоздающий секторы (см. описание второго полувитка).

Первый полувиток инфляции

Предположим теперь, что ставка заработной платы в потребительском секторе возросла от значения w_2 до значения w_2+dw_2, $dw_2>0$. При этом материальный и фондосоздающий секторы еще не успели среагировать на это увеличение, т.е. $dw_0=0$, $dw_1=0$. Увеличение оплаты труда в потребительском секторе приводит к переливу труда в этот сектор, т.е. $d\theta_2>0$.

Решение уравнений **(4.2.4)** в этом случае примет вид:

$$dp_1=\frac{a_1}{1-s_1}dp_0,$$

$$b\,dp_0=\frac{\Delta\left[w_0\theta_0-(1-\alpha_0)(1-a_0)p_0x_0\right]}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2},\qquad b=(1-a_0)x_0-\frac{s_0}{1-s_1}a_1x_1,$$

$$x_2\,dp_2=\frac{d\theta_2}{\theta_2(1-\theta_2-\theta_0\Delta)}\left[w_0\theta_0\Delta+w_2\theta_2-(1-\alpha_2)p_2x_2\right]+\theta_2\,dw_2.$$

Поскольку

$$b=(1-a_0)x_0-\frac{s_0}{1-s_1}a_1x_1=(1-a_0)x_0\left[1-\frac{s_0}{s_0+s_2}\delta_1\right]>0,$$

то знак dp_0, а следовательно, и dp_1, определяется знаком числителя. Так как $1-\theta_2-\theta_0\Delta>0$, $\Delta>0$, поэтому $dp_0>0$, $dp_1>0$ при

$$w_0\theta_0-(1-\alpha_0)(1-a_0)p_0x_0>0. \qquad \textbf{(4.2.5)}$$

Поскольку $dw_2>0$, $d\theta_2>0$, $1-\theta_2-\theta_0\Delta>0$, то для того, чтобы $dp_2>0$, достаточно выполнения условия

$$w_2\theta_2+w_0\theta_0\Delta-(1-\alpha_2)p_2x_2>-\gamma_2,\quad \gamma_2=\theta_2^2g_2\frac{dw_2}{d\theta_2}. \qquad \textbf{(4.2.6)}$$

Таким образом, при росте ставки заработной платы в потребительском секторе ($dw_2>0$) цена на его продукцию при выполнении условия **(4.2.6)** возрастет, а при постоянстве номинальной заработной платы в материальном и фондосоздающем секторах реальная заработная плата в этих секторах упадет со значений $\frac{w_0}{p_2}$, $\frac{w_1}{p_2}$ до значений $\frac{w_0}{p_2+dp_2}$, $\frac{w_1}{p_2+dp_2}$.

Второй полувиток инфляции

Для сохранения реальной заработной платы в материальном и фондосоздающем секторах надо поднять ставки заработной платы на dw_0, dw_1 соответственно. Проанализируем по отдельности случаи $dw_0>0$ и $dw_1>0$.

Вначале рассмотрим случай $dw_0>0, dw_1=dw_2=0,$ при этом $d\theta_0>0$. Тогда решение **(4.2.4)** примет вид:

$$dp_1=\frac{a_1}{1-s_1}dp_0,$$

$$b\,dp_0=\Delta\frac{w_0\theta_0-(1-\alpha_0)(1-a_0)p_0x_0}{\Delta(1-\theta_0)-\theta_2}\cdot\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\theta_0\,dw_0,$$

$$x_2\,dp_2=\frac{d\theta_0}{\theta_0(\Delta-\theta_2-\theta_0\Delta)}\left[-(1-\alpha_2)p_2x_2+w_0\theta_0\Delta+w_2\theta_2\right]+\theta_0\,dw_0.$$

Поскольку $b>0,\ d\theta_0>0,\ dw_0>0, \Delta>0$ то цены на продукцию материального и фондосоздающего секторов возрастут при выполнении условий:

$$\left.\begin{aligned}&w_0\theta_0-(1-\alpha_0)(1-a_0)p_0x_0>-\beta_0^+,\quad \beta_0^+=\frac{\theta_0^2g_0}{\Delta}\cdot\frac{dw_0}{d\theta_0},\ g_0>0,\\&w_0\theta_0-(1-\alpha_0)(1-a_0)p_0x_0<\beta_0^-,\quad \beta_0^-=-\frac{\theta_0^2g_0}{\Delta}\cdot\frac{dw_0}{d\theta_0},\ g_0<0.\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(4.2.7)}$$

Для того чтобы $dp_2>0,$ необходимо выполнение условий:

$$\left.\begin{aligned}&w_2\theta_2+w_0\theta_0\Delta-(1-\alpha_2)p_2x_2>-\gamma_0^+,\quad \gamma_0^+=\theta_0^2g_0\frac{dw_0}{d\theta_0},\quad g_0>0,\\&w_2\theta_2+w_0\theta_0\Delta-(1-\alpha_2)p_2x_2<\gamma_0^-,\quad \gamma_0^-=-\theta_0^2g_0\frac{dw_0}{d\theta_0},\quad g_0<0.\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(4.2.8)}$$

Теперь рассмотрим случай $dw_1>0,\ \ dw_0=dw_2=0,$ при этом $d\theta_1>0$. Тогда решение **(4.2.4)** примет вид:

$$\left[(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1s_0x_1\right]dp_0 =$$

$$= -\frac{\Delta(1-s_1)x_1}{g_1}\left[w_0\theta_0 - (1-\alpha_0)p_0(1-a_0)x_0\right]\frac{d\theta_1}{\theta_1} + s_0x_1\theta_1\, dw_1,$$

$$\left[(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1s_0x_1\right]dp_1 =$$

$$= -\frac{\Delta a_1x_1}{g_1}\left[w_0\theta_0 - (1-\alpha_0)p_0(1-a_0)x_0\right]\frac{d\theta_1}{\theta_1} + (1-a_0)x_0\theta_1\, dw_1,$$

$$x_2\, dp_2 = -\left[w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2\right]\frac{d\theta_1}{g_1\theta_1} + \theta_1\, dw_1.$$

Рост цен на средства производства обеспечивает условие

$$w_0\theta_0 - (1-\alpha_0)p_0(1-a_0)x_0 < \beta_1, \quad \beta_1 = \frac{g_1s_0\theta_1^2}{(1-s_1)\Delta}\cdot\frac{dw_1}{d\theta_1}, \qquad \textbf{(4.2.9)}$$

поскольку $\frac{s_0}{1-s_1} < \frac{(1-a_0)x_0}{a_1x_1}$,

а на предметы потребления —

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \gamma_1, \quad \gamma_1 = g_1\theta_1^2\cdot\frac{dw_1}{d\theta_1}. \qquad \textbf{(4.2.10)}$$

Учитывая **(4.2.7)—(4.2.10)**, получаем условия роста цен на втором полувитке:

$$\left.\begin{aligned} -\beta_0^+ < w_0\theta_0 - (1-\alpha_0)p_0x_0 < \beta_1, \quad & g_0 > 0,\\ w_0\theta_0 - (1-\alpha_0)p_0x_0 < \min(\beta_1, \beta_0^-), \quad & g_0 < 0,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.2.11)}$$

$$\left.\begin{aligned} -\gamma_0^+ < w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \gamma_1, \quad & g_0 > 0,\\ w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2x_2 < \min(\gamma_0^-, \gamma_1), \quad & g_0 < 0.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.2.12)}$$

4.3. Условия возникновения и самоподдержания инфляции

Учитывая условия роста цен на первом полувитке **(4.2.5)**, **(4.2.6)** и на втором полувитке **(4.2.11)**, **(4.2.12)**, а также умножая все части неравенств на L, получим следующие условия возникновения и самоподдержания инфляции в абсолютных показателях:

$$0 < W_0 - (1-\alpha_0)p_0X_0 < \beta L, \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

$$-\underline{\gamma}L < W_2 + W_0\Delta - (1-\alpha_2)p_2X_2 < \bar{\gamma}L, \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

где W_0, W_2 — объем заработной платы (доходов) занятых в материальном и потребительском секторах;

$$\beta = \beta_1, \quad \underline{\gamma} = \min(\gamma_0^+, \gamma_2) \quad \bar{\gamma} = \gamma_1 \text{ при } g_0 > 0;$$

$$\beta = \min(\beta_0^-, \beta_1), \quad \underline{\gamma} = \gamma_2, \quad \bar{\gamma} = \min(\gamma_0^-, \gamma_1) \text{ при } g_0 < 0.$$

Левые границы в основном определяются повышением ставки заработной платы в потребительском секторе (первый полувиток инфляции), правые — повышением ставок заработной платы в материальном и фондосоздающем секторах (второй полувиток инфляции).

Невыполнение некоторых из этих условий приводит к размыванию инфляции. Например, при невыполнении условия **(4.3.1)** инфляция будет проявляться только в росте цен на потребительские товары.

Условия **(4.3.1)** и **(4.3.2)** означают, что доходы занятых в материальном и потребительском секторах находятся в некоторых «коридорах» (размеры которых пропорциональны общему числу занятых) вокруг значений

$$\left.\begin{aligned} W_0 &= (1-\alpha_0)p_0(1-a_0)X_0, \\ W_2 &= (1-\alpha_2)p_2x_2 - W_0\Delta. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.3.3)}$$

С содержательной точки зрения условия возникновения и самоподдержания инфляции **(4.3.1)**, **(4.3.2)** можно интерпретировать следующим образом: имеется присущее инфляции распределение доходов **(4.3.3)**, при приближении к нему реального распределения доходов инфляция усиливается, при отдалении — ослабляется.

Схема инфляционного распределения доходов приведена на рис. 4.1 ($W = p_2X_2$ – общий платежеспособный спрос, равный стоимости произведенных потребительских товаров).

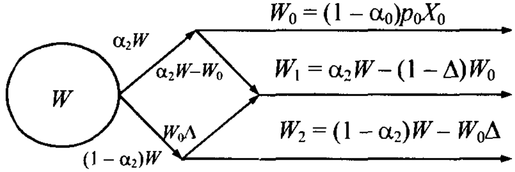

*Рис. 4.1. **Схема инфляционного распределения доходов***

Инфляционное распределение доходов имеет следующие характерные черты:

1) доходы материального и потребительского секторов формируются по приоритетному принципу, а фондосоздающего — по остаточному;

2) доходы материального и потребительского секторов пропорциональны товарной продукции этих секторов с коэффициентами пропорциональности, равными эластичности по труду;

3) потребительский сектор «расплачивается» за материалы доходом $W_0\Delta$, пропорциональным доходу материального сектора с коэффициентом пропорциональности, равным скорректированной доле потребительского сектора в расходе товарной продукции материального сектора.

4.4. Влияние инфляции на производство

Наиболее распространено мнение, что инфляция оказывает губительное влияние на производство, ведет к его сокращению. Это мнение вполне оправданно при галопирующей инфляции. Однако умеренная, регулируемая инфляция, как показал Кейнс, может быть источником роста производства.

Исследование, проведенное на трехсекторной модели, показывает, что в одних случаях инфляция может оказывать положительное влияние на производство, а в других — отрицательное. Напомним, что инфляция изучалась в условиях замкнутости и сбалансированности трехсекторной экономики, при малых изменениях макропараметров, а также в предположении, что распределение инвестиционных товаров фиксировано. Таким образом, речь идет об умеренной инфляции, как у Кейнса, но рассматривается более структурированная экономика (ведь Кейнс фактически изучал односекторную экономику). Поэтому общая картина влияния оказалась более разнообразной и пестрой, чем у Кейнса.

Выяснилось, что влияние инфляции на производство существенно зависит от соотношения критических точек ($\tilde{\theta}_2, \theta_2^*, \hat{\theta}_2$ и др.) и особенно от того, на какой из критических интервалов (т.е. интервалов, концами которых служат критические точки) попала точка θ_2, определяющая конкретное распределение трудовых ресурсов. Чтобы четко представить смысл перечисленных критических точек, напомним дифференциалы удельных выпусков, по которым устанавливаются критические точки:

$$dx_0 = \frac{u_0 x_0}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \quad (1) \quad dx_1 = -\frac{g_1 x_1}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \quad (2) \quad dx_2 = \frac{u_2 x_2}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \quad (3) \quad \mathbf{(4.4.1)}$$

где $u_0 = (1-\alpha_0)\Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta$, $u_2 = 1 - \alpha_2 - \theta_2 - \theta_0\Delta$, $g_0 = \Delta - \theta_2 - \theta_0\Delta$,

$$g_1 = \theta_2 + \theta_0\Delta, \; g_2 = 1 - \theta_2 - \theta_0\Delta, \quad \Delta = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2, \quad \delta_2 = \frac{a_2 x_2}{(1-\alpha_0)x_0}.$$

Критические точки определяются как корни следующих из приведенных выше функций (слева от критических точек значения этих функций положительны):

$$g_0(\hat{\theta}_2)=0, \quad u_0(\tilde{\theta}_2)=0, \quad u_2(\theta_2^*)=0.$$

Все перечисленные функции исследованы в Приложении 2.

Из результатов данного исследования и приведенных выражений вытекает, что:

$\tilde{\theta}_2$ — точка локального максимума удельного выпуска материалов;

θ_2^* — точка локального максимума удельного выпуска предметов потребления;

$\hat{\theta}_2$ — точка смены характера перелива трудовых ресурсов (при росте θ_2 и $\theta_2<\hat{\theta}_2$ происходит перелив трудовых ресурсов из фондосоздающего сектора в материальный и потребительский, а при $\theta_2>\hat{\theta}_2$ материальный сектор наряду с фондосоздающим становится донором потребительского).

Поскольку $g_0-u_0=\alpha_0\Lambda>0$ и $u_2-u_0=(1-\alpha_2)\delta_1>0$, то $g_0>u_0$ и $u_2>u_0$, поэтому всегда $\hat{\theta}_2>\tilde{\theta}_2$ и $\theta_2^*>\tilde{\theta}_2$.

Точки же $\hat{\theta}_2$ и θ_2^* могут находиться в разных соотношениях между собой. В Приложении 2 показано, что $\hat{\theta}_2<\theta_2^*$ при $\delta_2(\hat{\theta}_2)<1-\alpha_0$ и $\hat{\theta}_2>\theta_2^*$ при $\delta_2(\hat{\theta}_2)>1-\alpha_0$.

Поскольку дифференциалы удельных выпусков секторов согласно **(4.4.1)** пропорциональны $d\theta_2$, то для изучения влияния инфляции на производство надо выразить $d\theta_2$ через dw_2, тогда изменение производства в виде дифференциалов dx_0, dx_1, dx_2 будет напрямую связано с первоначальным приростом ставки заработной платы в потребительском секторе ($dw_2>0$).

Далее будем использовать следующие обозначения для эластичности долей трудовых ресурсов по заработной плате и для тарифных коэффициентов секторов (за базу взята средняя заработная плата $w=\sum_{i=0}^{2} w_i\theta_i$):

$$\varepsilon_i=\frac{w_i}{\theta_i}\cdot\frac{d\theta_i}{dw_i}, \qquad \kappa_i=\frac{w_i}{w}, \quad i=0,1,2.$$

На первом полувитке доля потребительского сектора в распределении трудовых ресурсов и цена на его продукцию согласно **(4.2.2)** изменились следующим образом:

$$d\theta_2 = \frac{d\theta_2}{dw_2} dw_2 = \varepsilon_2 \theta_2 \frac{dw_2}{w_2},$$

$$x_2\, dp_2 = \frac{\tilde{w}\, d\theta_2}{\theta_2 g_2} + \theta_2\, dw_2 = \left(\theta_2 + \frac{\tilde{w}}{\theta_2 g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dw_2} \right) dw_2,$$

где $\tilde{w} = w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)w$.

На втором полувитке в материальном секторе необходимо поднять номинальную заработную плату на dw_0, чтобы обеспечить сохранение реальной заработной платы:

$$\frac{w_0}{p_2} = \frac{w_0 + dw_0}{p_2 + dp_2},$$

откуда (используем выражение для dp_2 и $w = p_2 x_2$)

$$dw_0 = \frac{w_0}{p_2} dp_2 = \frac{w_0}{p_2 x_2} \left(\theta_2 + \frac{\tilde{w}}{\theta_2 g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dw_2} \right) dw_2 = w_0 \left(\theta_2 + \frac{\tilde{w}}{\theta_2 g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dw_2} \right) \frac{dw_2}{w}.$$

Поскольку

$$d\theta_0 = \frac{d\theta_0}{dw_0} dw_0 = \varepsilon_0 \theta_0 \frac{dw_0}{w_0},$$

то (используем **(4.4.3)**):

$$d\theta_2 = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_0 g_0} d\theta_0 = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_0 g_0} \varepsilon_0 \theta_0 \frac{dw_0}{w_0} = \frac{\theta_2 g_2}{\theta_0 g_0} \varepsilon_0 \theta_0 \left(\theta_2 + \frac{\tilde{w}}{\theta_2 g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dw_2} \right) \frac{dw_2}{w} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{g_0} \left(\theta_2^2 g_2 + \varepsilon_2 \theta_2 \frac{\tilde{w}}{w_2} \right) \frac{dw_2}{w}.$$

Точно так же для сохранения реальной заработной платы и в фондосоздающем секторе необходимо повысить номинальную заработную плату на $dw_1 > 0$, где dw_1 следующим образом связан с dw_2:

$$dw_1 = w_1 \left(\theta_2 + \frac{\tilde{w}}{\theta_2 g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dw_2} \right) \frac{dw_2}{w},$$

что приведет к переливу трудовых ресурсов в фондосоздающий сектор в размере

$$d\theta_1 = \frac{d\theta_1}{dw_1} dw_1 = \varepsilon_1 \theta_1 \frac{dw_1}{w_1}.$$

При этом в потребительском секторе произойдет следующее сокращение трудовых ресурсов:

$$d\theta_2 = -\frac{\theta_2 g_2}{\theta_1 g_1} d\theta_1 = -\frac{\varepsilon_1}{g_1}\left(\theta_2^2 g_2 + \varepsilon_2 \theta_2 \frac{\tilde{w}}{w_2}\right)\frac{dw_2}{w}.$$

Итак, на втором полувитке доля потребительского сектора в распределении труда изменится на величину

$$d\theta_2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\left(\theta_2 g_2 + \varepsilon_2 \frac{\tilde{w}}{w_2}\right)\frac{\theta_2}{w} dw_2,$$

а в целом за весь виток — на величину

$$d\theta_2 = \varepsilon_2 \theta_2 \frac{dw_2}{w_2} + \left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\left(\theta_2 g_2 + \varepsilon_2 \frac{\tilde{w}}{w_2}\right)\frac{\theta_2}{w} dw_2 =$$

$$= \theta_2 \left[\varepsilon_2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\left(\kappa_2 \theta_2 g_2 + \varepsilon_0 \frac{\tilde{w}}{w}\right)\right]\frac{dw_2}{w_2}.$$

Как видим, характер перераспределения трудовых ресурсов за полный виток инфляции определяется знаком выражения

$$\varepsilon_2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\left(\kappa_2 \theta_2 g_2 + \varepsilon_2 \frac{\tilde{w}}{w}\right). \qquad \textbf{(4.4.2)}$$

Если выражение **(4.4.2)** положительно, то происходит перелив трудовых ресурсов в потребительский сектор, в противном случае — отток трудовых ресурсов из этого сектора. Поэтому выражение **(4.4.2)** целесообразно назвать *индикатором перераспределения труда* (*Indicator of redistribute of Labour*). Далее будем его обозначать буквой I и коротко говорить: индикатор труда. Поскольку нас интересует только знак индикатора, то при умножении или делении индикатора на положительную константу снова получается индикатор труда.

Знак индикатора **(4.4.2)** зависит от соотношения эластичности $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, тарифных коэффициентов $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$, а также от распределения труда $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, особенно от того, на каком из критических интервалов находится θ_2.

Поскольку речь идет об инфляции, то в выражении **(4.4.2)** величины $\kappa_2\theta_2$ и $\tilde{w}$ должны находиться вблизи значений, определяемых инфляционным распределением доходов секторов. Инфляционное распределение доходов согласно **(4.3.2)** имеет следующий вид $(W = W_0 + W_1 + W_2)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{W_0}{W} &= \frac{(1-\alpha_0)p_0(1-a_0)X_0}{W}, \\ \frac{W_1}{W} &= \alpha_2 - (1-\Delta)\frac{W_0}{W}, \\ \frac{W_2}{W} &= 1 - \alpha_2 - \frac{W_0}{W}\Delta. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.4.3)}$$

Последнее соотношение **(4.4.3)** можно записать в виде:

$$W_2 + W_0\Delta - (1-\alpha_2)W = 0. \qquad \textbf{(4.4.4)}$$

Поскольку

$$W_i = L_i w_i = L\theta_i W_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad W = wL,$$

то соотношение **(4.4.4)** принимает следующую форму:

$$w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)w = 0.$$

Поэтому для инфляционного распределения доходов

$$\tilde{w} = w_2\theta_2 + w_0\theta_0\Delta - (1-\alpha_2)w = 0.$$

Тарифные коэффициенты κ_i следующим образом связаны с распределением трудовых ресурсов и доходов:

$$\kappa_i = \frac{w_i}{w} = \frac{w_i L\theta_i}{wL\theta_i} = \frac{w_i L_i}{wL\theta_i} = \frac{W_i}{W\theta_i}, \quad i = 0, 1, 2,$$

поэтому

$$\kappa_i\theta_i = \frac{W_i}{W}, \quad i = 0, 1, 2, \quad \kappa_0\theta_0 + \kappa_1\theta_1 + \kappa_2\theta_2 = 1. \qquad \textbf{(4.4.5)}$$

Используя **(4.4.5)**, из последнего соотношения **(4.4.3)** получаем:

$$\kappa_2\theta_2 = 1 - \alpha_2 - \kappa_0, \qquad \textbf{(4.4.6)}$$

откуда

$$0 < \kappa_2\theta_2 < 1 - \alpha_2. \qquad \textbf{(4.4.7)}$$

Таким образом, для инфляционного распределения доходов индикатор перераспределения трудовых ресурсов примет вид:

$$\varepsilon_2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\kappa_2\theta_2 g_2,$$

где $0 < \kappa_2\theta_2 < 1 - \alpha_2$ определяется из **(4.4.6)**.

Поскольку нас интересует только знак последнего выражения, то удобнее его использовать в следующей форме, разделив на g_2 $(g_2 > 0)$:

$$I = \frac{\varepsilon_2}{g_2} + \left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\kappa_2\theta_2. \qquad \textbf{(4.4.8)}$$

В выражении **(4.4.8)** первое слагаемое $\frac{\varepsilon_2}{g_2}$ определяется первым полувитком инфляции, а второе слагаемое $\left(\frac{\varepsilon_0}{g_0} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)\kappa_2\theta_2$ — вторым.

Сделаем весьма реалистичное для рыночной экономики предположение, что наиболее предпочтительны трудовые ресурсы в потребительском секторе, а предпочтения в трудовых ресурсах в материальном и фондосоздающем секторах примерно одинаковы:

$$\varepsilon_2 \geq \varepsilon_0, \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1, \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Тогда индикатор примет вид:

$$I = \frac{\varepsilon_2}{g_2} + \varepsilon\left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g_1}\right)\kappa_2\theta_2, \quad \kappa_2\theta_2 < 1 - \alpha_2 < 1, \ \varepsilon_2 \geq \varepsilon \cdot \qquad \textbf{(4.4.9)}$$

Поскольку согласно Приложению 2 $g_1 > 0$, $g_1' > 0$, $g_2 > 0$, $g_2' > 0$, а $g_0 > 0$ при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$ и $g_0 < 0$ при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \overline{\theta}_2)$, то знак I при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$ существенным образом зависит от соотношения между g_0 и g_1, а при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \overline{\theta}_2)$ — от соотношения между $\frac{\varepsilon_2}{g_2}$ и $\varepsilon\left(-\frac{1}{g_0} + \frac{1}{g_1}\right)$.

Характер изменения g_0, g_1 при $\theta_2 \in (0, \hat{\theta}_2)$ целиком определяется их соотношением при малых θ_2, при этом $g_0(0) = g_1(0) = 0$, $g_0'(0) = +\infty$, $g_1'(0) = +\infty$.

В самом деле, поскольку $g_0(0) = g_1(0) = 0$, то при малых θ_2 соотношение между g_0 и g_1 определяется соотношением между $g_0'(\theta_2)$ и $g_1'(\theta_2)$.

При малых θ_2 (согласно Приложению 2)

$$g_0'(\theta_2) = (1-\alpha_2)[1-\theta_0(0)]\theta_2^{-\alpha_2}, \qquad g_1'(\theta_2) = (1-\alpha_2)\theta_0(0)\theta_2^{-\alpha_2},$$

поэтому $g_0 > g_1$, если $1 - \theta_0(0) > \theta_0(0)$. Но при $\theta_2 = 0$ согласно уравнениям (1), (2) **(4.4.1)**

$$(1-a_0)B_0\theta_0^{1-\alpha_0}(0) = a_1 B_1 [1-\theta_0(0)]^{1-\alpha_0},$$

поэтому $1 - \theta_0(0) > \theta_0(0)$ при $\frac{a_1 B_1}{(1-a_0)B_0} < 1$, где $B_0 = B_0(s)$, $B_1 = B_1(s)$.

Итак, пусть $a_1 B_1 < (1-a_0)B_0$, тогда $g_0 > g_1$ при малых θ_2, поэтому имеет место картина совместного изменения g_0, g_1, показанная на рис. 4.2.

Таким образом, в некоторой точке θ_2^1 $g_0(\theta_2^1) = g_1(\theta_2^1)$, поэтому при $\theta_2 \in (\theta_2^1, \hat{\theta}_2)$ $\frac{1}{g_0} > \frac{1}{g_1}$, следовательно, $I > 0$. Напротив, при

$\theta_2 \in (0,\ \theta_2^1)$ $\frac{1}{g_0} < \frac{1}{g_1}$, поэтому выражение в скобках в **(4.4.4)** становится отрицательным. Таким образом, найдется единственная точка $\theta_2^0 < \theta_2^1$, в которой $I(\theta_2^0) < 0$, так что $I(\theta_2) < 0$ при $\theta_2 \in (0, \theta_2^0)$ и $I(\theta_2) > 0$ при $\theta_2 \in (\theta_2^0, \hat{\theta}_2)$.

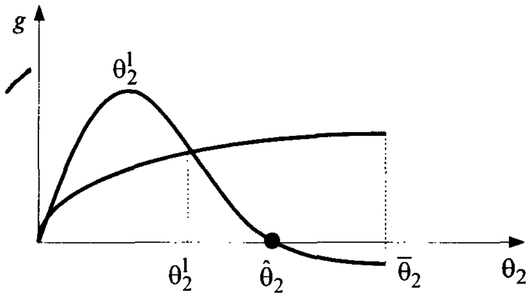

Рис. 4.2. ***Графики функций*** g_0, g_1
при $a_1B_1 < (1-a_0)B_0$

Точно так же при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \overline{\theta}_2)$ найдется такая точка $\hat{\theta}_2^0$, для которой $I(\hat{\theta}_2^0) = 0$, поэтому $I(\theta_2) < 0$ при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \theta_2^0)$ и $I(\theta_2) > 0$ при $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2^0, \overline{\theta}_2)$. На рис. 4.3 показан график изменения индикатора при $a_1B_1 < (1-a_0)B_0$.

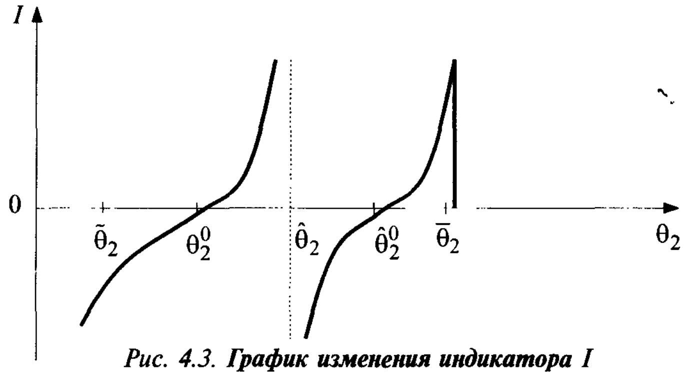

Рис. 4.3. ***График изменения индикатора I***
при $a_1B_1 < (1-a_0)B_0$

В противном случае, когда $a_1B_1 > (1-a_0)B_0$, при малых θ_2 $g_0 < g_1$, картина совместного изменения g_0, g_1 совершенно иная (рис. 4.4).

На рис. 4.4 видно, что в этом случае имеется, вообще говоря, две точки пересечения графиков g_0 и g_1 (может не оказаться ни одной).

При $\theta_2 \in (\tilde{\theta}_2^1, \theta_2^1)$ выражение в скобках в **(4.4.9)** отрицательно, поэтому, возможно, найдутся две точки $\tilde{\theta}_2^0 > \tilde{\theta}_2^1$, $\theta_2^0 > \theta_2^1$, для которых $I(\tilde{\theta}_2^0) = I(\theta_2^0) = 0$. Тогда $I > 0$ при $\theta_2 \in (0, \tilde{\theta}_2^0)$, $I < 0$ при $\theta_2 \in (\tilde{\theta}_2^0, \theta_2^0)$, $I > 0$ при $\theta_2 \in (\theta_2^0, \hat{\theta}_2)$. На оставшемся интервале $(\hat{\theta}_2, \overline{\theta}_2)$ характер изменения индикатора точно такой же, как в предыдущем случае. График изменения индикатора при $a_1 B_1 > (1 - a_0) B_0$ показан на рис. 4.5.

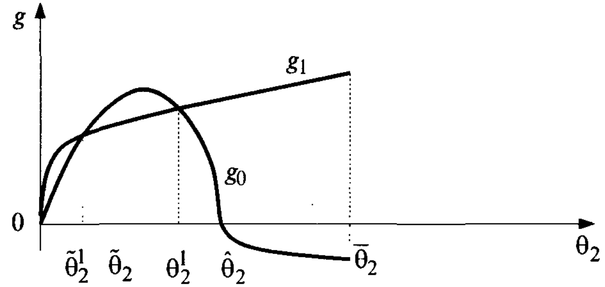

Рис. 4.4. ***Графики функций*** g_0, g_1
при $a_1 B_1 > (1 - a_0) B_0$

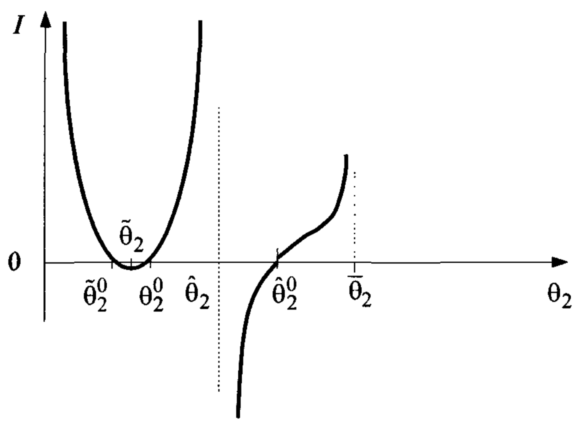

Рис. 4.5. ***График изменения индикатора*** I
при $a_1 B_1 > (1 - a_0) B_0$

В табл. 4.1 представлена полная и детальная картина вызванных инфляцией изменений в распределении труда и производстве. В этой таблице изменения даны для таких состояний трехсекторной экономики, которые характеризуются условием

$$\theta_2^0(s) < \theta_2^*(s) < \hat{\theta}_2^0(s).$$

Таблица 4.2. ***Изменения в распределении трудовых ресурсов и производстве, порожденные увеличением ставки заработной платы в потребительском секторе***

$\hat{\theta}_2 < \theta_2^*, \quad a_1 B_1 < (1-a_0)B_0, \quad B_1 = B_1(s), \quad B_0 = B_0(s)$												
$0 < \theta_2 < \tilde{\theta}_2$		$\tilde{\theta} < \theta_2 < \theta_2^0$		$\theta_2^0 < \theta_2 < \hat{\theta}_2$		$\hat{\theta}_2 < \theta_2 < \theta_2^*$		$\theta_2^* < \theta_2 < \hat{\theta}_2^0$		$\hat{\theta}_2^0 < \theta_2 < \bar{\theta}_2$		–
$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$	–
$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	–
$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 < 0$	–
$\hat{\theta}_2 > \theta_2^*, \quad a_1 B_1 < (1-a_0)B_0$												
$0 < \theta_2 < \tilde{\theta}_2$		$\tilde{\theta} < \theta_2 < \theta_2^0$		$\theta_2^0 < \theta_2 < \theta_2^*$		$\theta_2^* < \theta_2 < \hat{\theta}_2$		$\hat{\theta}_2 < \theta_2 < \hat{\theta}_2^0$		$\hat{\theta}_2^0 < \theta_2 < \bar{\theta}_2$		–
$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$	–
$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	–
$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 < 0$	–

Окончание табл. 4.2

$\hat{\theta}_2 < \theta_2^*, \quad a_1 B_1 > (1-a_0) B_0$													
$0 < \theta_2 < \tilde{\theta}_2^0$		$\tilde{\theta}_2^0 < \theta_2 < \tilde{\theta}_2$		$\tilde{\theta}_2 < \theta_2 < \theta_2^0$		$\theta_2^0 < \theta_2 < \hat{\theta}_2$		$\hat{\theta}_2 < \theta_2 < \theta_2^*$		$\theta_2^* < \theta_2 < \hat{\theta}_2^0$		$\hat{\theta}_2^0 < \theta_2 < \bar{\theta}_2$	
$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$
$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$
$d\theta_2 > 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 < 0$
$\hat{\theta}_2 > \theta_2^*, \quad a_1 B_1 > (1-a_0) B_0$													
$0 < \theta_2 < \tilde{\theta}_2^0$		$\tilde{\theta}_2^0 < \theta_2 < \tilde{\theta}_2$		$\tilde{\theta}_2 < \theta_2 < \theta_2^0$		$\theta_2^0 < \theta_2 < \hat{\theta}_2$		$\hat{\theta}_2 < \theta_2 < \theta_2^*$		$\theta_2^* < \theta_2 < \hat{\theta}_2^0$		$\hat{\theta}_2^0 < \theta_2 < \bar{\theta}_2$	
$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 < 0$	$d\theta_0 > 0$	$dx_0 > 0$	$d\theta_0 < 0$	$dx_0 < 0$
$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$	$d\theta_1 > 0$	$dx_1 > 0$	$d\theta_1 < 0$	$dx_1 < 0$
$d\theta_2 > 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 < 0$	$d\theta_2 < 0$	$dx_2 > 0$	$d\theta_2 > 0$	$dx_2 < 0$

Данное условие не является ограничивающим. Если бы оно не выполнялось, то для этой новой ситуации просто пришлось бы заполнить еще одну или несколько других таблиц, подобных табл. 4.1.

В условиях неизменности технологического уклада и распределения инвестиционных товаров естественно считать благоприятным такое перераспределение трудовых ресурсов, которое приводит к росту удельного выпуска предметов потребления. Подобное перераспределение определяется движением свободной переменной θ_2 в направлении к точке θ_2^* локального максимума удельного выпуска предметов потребления. Если под этим углом зрения рассматривать табл. 4.1, то можно сократить число критических интервалов до уровня, определяемого индикатором перераспределения труда. Следует также отметить, что некоторые из теоретически осуществимых состояний практически неосуществимы, но в описании влияния инфляции на производство они принимаются во внимание.

Случай $a_1B_1(s) < (1-a_0)B_0(s)$

Для тех состояний, при которых $\theta_2 \in (0, \theta_2^0)$, влияние инфляции сказывается в оттоке трудовых ресурсов из материального и потребительского секторов, что приводит к сокращению производства предметов потребления. Таким образом, инфляция в этой ситуации усугубляет гипертрофированный излишек труда в фондосоздающем секторе, т.е. оказывает *отрицательное* воздействие на производство.

В случае состояний с $\theta_2 \in (\theta_2^0, \hat{\theta}_2)$, $\hat{\theta}_2 < \theta_2^*$, инфляция имеет своим следствием перераспределение излишка трудовых ресурсов из фондосоздающего в материальный и потребительский секторы, что приводит к увеличению производства предметов потребления. Таким образом, инфляция оказывает *положительное* влияние.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \theta_2^*)$ инфляция оказывает *отрицательное* влияние на экономику, поскольку отодвигает ее от технологического оптимума (происходит перелив трудовых ресурсов из потребительского сектора в материальный и фондосоздающий, производство предметов потребления сокращается).

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2^0)$ *положительное* воздействие инфляции на экономику состоит в том, что она сбрасывает излишек трудовых ресурсов из потребительского сектора в материальный и фондосоздающий секторы, что приводит к росту производства предметов потребления.

В случае состояний с $\theta_2 \in (\theta_2^0, \theta_2^*)$, $\hat{\theta}_2 > \theta_2^*$, инфляция имеет своим следствием перераспределение излишних трудовых ресурсов из фондосоздающего сектора в материальный и потребительский, что приводит к росту выпуска предметов потребления, т.е. влияние инфляции в данном случае *положительно.*

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2)$ инфляция оказывает *отрицательное* воздействие на экономику, поскольку приводит к избытку трудовых ресурсов в потребительском секторе, что приводит к падению выпуска предметов потребления.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2^0)$ влияние инфляции *положительно*, поскольку происходит перераспределение излишних трудовых ресурсов из потребительского сектора в материальный и фондосоздающий секторы, что приводит к росту производства предметов потребления.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2^0, \bar{\theta}_2)$ инфляция оказывает *отрицательное* воздействие, поскольку усугубляет переполнение трудовыми ресурсами потребительского сектора, что приводит к дальнейшему сокращению производства предметов потребления.

Случай $a_1 B_1(s) > (1-a_0) B_0(s)$

При $\theta_2 \in (0, \tilde{\theta}_2^0)$ инфляция *положительно* влияет на производство, поскольку двигает экономику от состояния «производство для производства» в сторону технологического оптимума (происходит перелив трудовых ресурсов из фондосоздающего в материальный и потребительский секторы, растет производство предметов потребления).

При $\theta_2 \in (\tilde{\theta}_2^0, \theta_2^0)$ *отрицательное* влияние инфляции сказывается в оттоке дефицитных трудовых ресурсов из потребительского сектора, что приводит к сокращению производства предметов потребления.

При $\theta_2 \in (\theta_2^0, \hat{\theta}_2)$, $\hat{\theta}_2 < \theta_2^*$, влияние инфляции *положительно*: происходит перелив трудовых ресурсов из фондосоздающего сектора в материальный и потребительский, выпуск предметов потребления растет.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \theta_2^*)$ инфляция *отрицательно* сказывается на производстве: экономика отходит от технологического оптимума, производство предметов потребления падает за счет перелива трудовых ресурсов из потребительского сектора в материальный и фондосоздающий секторы.

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2^0)$ влияние инфляции *положительно*: происходит сброс излишних трудовых ресурсов из потребительского сектора в материальный и фондосоздающий секторы, производство предметов потребления растет.

При $\theta_2 \in (\theta_2^0, \theta_2^*)$, $\theta_2^* < \hat{\theta}_2$, инфляция оказывает *положительное* воздействие на производство: производство предметов потребления растет за счет перелива трудовых ресурсов из фондосоздающего сектора в материальный и потребительский секторы.

При $\theta_2 \in (\theta_2^*, \hat{\theta}_2)$ влияние инфляции *отрицательно*: потребительский и материальный секторы получают излишние трудовые ресурсы из фондосоздающего сектора, производство предметов потребления падает.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2^0)$ инфляция оказывает *положительное* воздействие на экономику: происходит сброс излишних трудовых ресурсов из потребительского сектора в материальный и потребительский секторы, производство во всех секторах растет.

При $\theta_2 \in (\hat{\theta}_2^0, \overline{\theta}_2)$ влияние инфляции *резко отрицательно*: потребительский сектор получает излишние трудовые ресурсы из материального и фондосоздающего секторов, производство во всех секторах падает.

Вопросы и задания

1. Каков экономический смысл условий возникновения и самоподдержания инфляции?
2. Какие, на ваш взгляд, интервалы изменения параметра θ_2 характерны для реальной экономики? (Указание. Примените результаты § 3.3.)
3. Условия возникновения и самоподдержания инфляции получены в стационарном состоянии трехсекторной экономики. Можно ли применять их в переходном режиме?

5

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

Основная задача государственного регулирования экономики — вырабатывать и поддерживать такие правила взаимодействия субъектов экономики на рынках труда, капитала, товаров и услуг, которые способствуют эффективному функционированию и развитию экономики. Под *эффективностью* в данном случае понимается движение в направлении достижения определенных социально ориентированных результатов при возможно меньших затратах.

Экономика только тогда будет эффективной, если проводится такая экономическая политика государства, в которой социально-экономические ожидания общества согласованы с производственными и финансово-инвестиционными возможностями экономики.

С помощью налогов, тарифов, льгот и других экономических рычагов государство может управлять субъектами экономики в рамках стабильной системы правил таким образом, чтобы в каждой конкретной ситуации экономика двигалась к социально ориентированному оптимуму, отражающему ожидания общества.

Важнейшим рычагом государственного регулирования являются налоги. В этой главе раскрываются возможности математического моделирования для выявления регулирующей роли налогов на макроуровне.

5.1. Роль и функции налогов в обществе

Налоги — это обязательные сборы, взимаемые государственными органами с хозяйствующих субъектов и граждан, по ставкам, установленным законом.

Общий размер *налогового бремени* определяется суммой расходов государства на выполнение его функций (управление, оборона, суд, охрана порядка и т.д.). В этом состоит *фискальная* функция налогов.

Государственные расходы имеют тенденцию к росту в связи с усложнением экономики и вытекающим отсюда усложнением управленческих задач, в то время как конкретные субъекты налогообложения (юридические и физические лица) заинтересованы в уменьшении налогового бремени. Следует заметить, что налоги с физических лиц составляют 2—3% общего сбора налогов, поэтому основу бюджетных поступлений образуют налоговые сборы с хозяйствующих субъектов. Для каждого хозяйствующего субъекта экономики в конкретной экономической ситуации существует пороговое значение налоговой нагрузки, превышение которого приводит к резкому снижению деловой активности, а при значительном превышении — к частичному или полному свертыванию производства[1].

Это явление хорошо отражает кривая Лаффера (рис. 5.1).

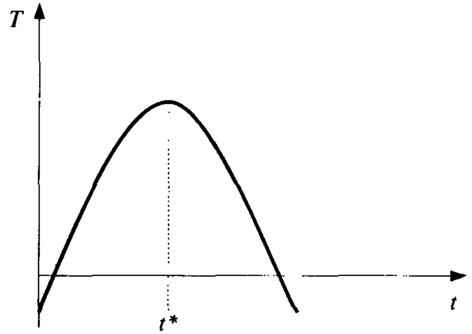

Рис. 5.1. ***Зависимость сбора налогов*** T ***от налоговой ставки*** t

В основе этой кривой лежит предположение, что объем выпуска продукции фирмы (налоговая база) при $t \geq t_0$ начинает сокращаться, т.е. $X'(t) < 0$ при $t \geq t_0$. Поэтому бюджетные поступления (сбор налогов) как функция налоговой ставки t

$$T = tX(t),$$

ведут себя так, как это показано на рис. 5.1. При этом налоговая ставка t^* обеспечивающая максимум поступления налогов, находится из условия

$$T'(t^*) = 0,$$

или

$$t^* = -\frac{X}{X'}, \quad t^* > t_0.$$

Например, если цена линейно убывает с ростом объема выпуска

$$p(X) = b - aX,$$

[1] Ярким подтверждением является опыт экономики РФ 90-х гг. XX в. При «закручивании налоговых гаек» предприятия вначале «проедали» оборотные средства, затем основные производственные фонды, после чего очередь доходила до объектов социальной сферы. Все это сопровождалось сокращением объемов производства, задержками с выплатой заработной платы и увольнениями производственного персонала.

а издержки (без учета налогов) являются квадратической функцией объема выпуска

$$C(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma,$$

то чистая прибыль (после вычета налогов) равна

$$\Pi(X) = (b - aX)X - \alpha X^2 - \beta X - \gamma - tX.$$

По критерию максимума прибыли (при фиксированной налоговой ставке t) получаем:

$$\Pi'(X) = b - 2aX - 2\alpha X - \beta - t = 0,$$

откуда

$$X(t) = \frac{b-\beta}{a+\alpha} - \frac{t}{a+\alpha},$$

т.е. выпуск является линейной убывающей функцией налоговой ставки, бюджетные поступления (сбор налогов) — параболой

$$T(t) = \frac{b-\beta}{a+\alpha}t - \frac{t^2}{a+\alpha}.$$

Поэтому

$$t^* = \frac{b-\beta}{2}.$$

Как видим, действительно существуют пороговая налоговая ставка t^* и пороговое налоговое бремя $T(t^*)$, превышение которых приводит к усиливающемуся падению объема выпуска.

Следует заметить, что при $t < t^*$, фирма действует по критерию максимума прибыли, а при $t \geq t^*$ — по критерию выживания, т.е. сохранения своей рыночной ниши.

В связи с этим уместно привести следующее высказывание А. Смита: «При какой-либо особенной крайности народ может под влиянием сильного общественного воодушевления сделать большое усилие и отдать даже часть своего капитала, чтобы прийти на помощь государству, но совершенно немыслимо, чтобы он делал это сколько-нибудь продолжительное время; а если бы он делал это, налог скоро бы разорил его в такой степени, что он вообще утратил бы способность поддерживать государство».

Из вышесказанного видна *регулирующая* функция налогов. Ослабляя налоговое бремя, государство может усиливать деловую активность, в противном случае — тормозить ее. Если же необходимо собрать налоги в определенном объеме, то это налоговое бремя следует распределить между субъектами экономики таким образом, чтобы обеспечить наилучшие условия для роста каждого предприятия, отрасли и экономики в целом и, по возможности, на более высоком технологическом уровне. Поэтому следует предоставлять налоговые льготы наукоемким отраслям и отраслям, обеспечивающим рост экономики. Так, вложения в сельское хозяйство, обеспечивающие занятость одного человека, по цепочке межотраслевого взаимодействия приведут к занятости девяти человек в других отраслях, дополнительная занятость одного человека в легкой промышленности — к занятости четырех человек в других отраслях и т.п.

Прямым *антиинфляционным* свойством обладает ценовой налог с базовой ценой. Если фактическая цена превышает базовую, то обычный налог возрастает пропорционально отношению фактической цены к базовой (ценовой налог равен приращению обычного налога); если равна, то ценовой налог равен нулю; если меньше базовой, то обычный налог уменьшается пропорционально отношению фактической цены к базовой. Поэтому в число базовых товаров следует включать продукцию предприятий-монополистов.

В сложившейся экономической ситуации весьма распространенным явлением стало сокрытие налоговой базы для ухода от налогов (бартер, расчет наличными с контрагентами, занижение фонда оплаты труда и т.д.). Поэтому многие налоги выполняют функцию *преодоления* налогового бремени или *ухода от налогов.*

Основные налоги на хозяйствующие субъекты можно разбить на две группы:

1) налоги на капитал (15—30% общих сборов с предприятий);

2) налоги на валовой доход и его части (главная составляющая сборов с предприятий).

Налоги на капитал лишь косвенно зависят от результатов хозяйственной деятельности, зато стимулируют предприятия избавляться от неэффективных фондов и с максимальной выгодой использовать оставшиеся капитальные ресурсы. Уход от уплаты этих налогов крайне затруднителен.

Налоги, составляющие вторую группу, хорошо видны из рис. 5.2. Налоговая база для каждого последующего налога уменьшается за счет производственно-хозяйственных расходов и выплат по предыдущим налогам.

При увеличении ставок *налога с выручки* предприятия прекращают выпуск тех видов продукции, производство которых связано с большими издержками. *Налог на добавленную стоимость* забирает у производителя часть того, что может быть в дальнейшем использовано для развития производства. Еще в большей мере это относится к *налогу на прибыль*: налог на инвестиционную часть прибыли сокращает инвестиции и тем самым уменьшает будущий рост, а налог на потребляемую часть прибыли снижает интерес производителя к развитию.

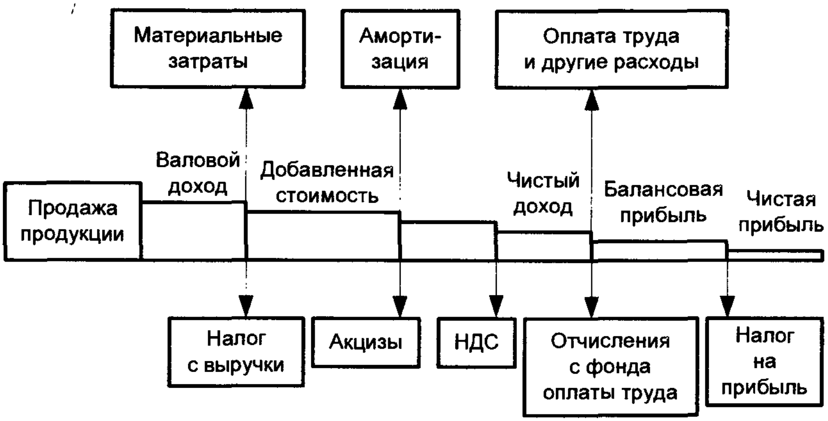

Рис. 5.2. ***Налоги на выходной финансовый поток предприятия***

В целом налоги на выходящий финансовый поток предприятия выполняют фискальную функцию, их увеличение приводит к росту цен и снижению объемов производства. При снижении этих налогов ускоряется экономическое развитие, которое на первых порах может сопровождаться бюджетным дефицитом и, следовательно, дополнительной эмиссией денег, но увеличившаяся денежная масса затем может быть поглощена за счет роста производства.

При переходе от микроуровня (предприятие, организация) на макроуровень все показатели (включая налоги) должны быть естественным образом *агрегированы*. Основой *моделирования экономики* на макроуровне является представление результата функционирования всей экономики (или ее крупного подразделения) в виде производственной функции от затраченных агрегированных ресурсов:

$$X = F(K, L), \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

где X — агрегированный выпуск продукции (например, в неизменных ценах базового года);

K — капитал (либо его важнейшая часть — основные производственные фонды в неизменных ценах базового года);

L — число занятых, млн. чел.

Следовательно, все налоги должны быть сведены к налогам на выпуск, трудовые ресурсы и капитал. Но налог на ресурс приводит к уменьшению этого ресурса, а потому и к соответствующему уменьшению выпуска. Уменьшение выпуска может быть рассчитано по производственной функции. Поэтому такой налог также можно перевести в налог на выпуск.

Таким образом, при моделировании налогообложения на макроуровне все налоги должны быть сведены к налогам на выпуск. Практически ставка налога на выпуск в конкретном году в текущих ценах может быть рассчитана как отношение сбора налогов T в экономике (либо ее крупном подразделении) к соответствующему выпуску в текущих ценах:

$$t = \frac{T}{pX}. \qquad (5.1.2)$$

Из формулы **(5.1.2)**, в частности, следует, что если выпуск в неизменных ценах остался прежним, сбор налогов в действующих ценах остался неизменным, а цены возросли, то налоговая ставка в действующих ценах уменьшилась (де факто).

Указанный пересчет налогов ничуть не противоречит задачам совершенствования системы налогообложения на микроуровне: каждое изменение в этой системе приводит к соответствующему изменению ставок налогов на выпуски крупных подразделений экономики. Вместе с тем сравнительный анализ тяжести налогообложения крупных подразделений экономики позволяет делать выводы о перераспределении налогового бремени между ними, т.е. указывать возможные направления совершенствования системы налогообложения.

В заключение скажем несколько слов об источнике налогов. Преобладающим является мнение, что источником налогов служит прибыль. Представляется, что источник налогов — хозяйственная деятельность. Поскольку есть деятельность, то и есть результат деятельности (продукция, услуги), а потому есть и налоги; нет деятельности — нет и налогов. Налоги, на наш взгляд, — это общественная нагрузка на хозяйственную деятельность, причем нагрузка в такой же мере неизбежная и необходимая, как материальные затраты, амортизация, заработная плата. Таким образом, надо так выстраивать налоговую систему, чтобы выручки от производства жизненно необходимых продуктов хватало для осуществления производственно-хозяйственных затрат и выплаты налогов, а также хотя бы немного оставалось для расширения производства и стимулирования работников.

5.2. Налоги в трехсекторной модели экономики[1]

В § 5.1 было обосновано положение о пересчете налогов на размер деятельности. В замкнутой трехсекторной модели экономики имеется три вида деятельности, размеры которых X_0, X_1, X_2 — выпуски секторов в натуральном исчислении (например, в ценах

[1] Результаты, приведенные в § 5.2—5.4, получены автором.

некоторого года, выбранного за базовый). Если определены ставки налогов на единицу деятельности t_0, t_1, t_2, то сборы налогов с секторов соответственно равны t_0X_0, t_1X_1, t_2X_2, поэтому общий сбор

$$T = t_0X_0 + t_1X_1 + t_2X_2. \tag{5.2.1}$$

Поскольку экономика рассматривается как замкнутая система, то валовой доход каждого сектора расходуется по следующим четырем основным направлениям:

1) на приобретение материалов (топлива, электроэнергии, сырья и других материалов);

2) на приобретение инвестиционных товаров (для амортизации и расширения производства, в том числе за счет прибыли);

3) на выплату заработной платы и стимулирующих надбавок за счет прибыли;

4) на выплату налогов.

В соответствии с этим балансы доходов и расходов секторов можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p_0X_0 &= p_0a_0X_0 + p_1s_0X_1 + w_0L_0 + t_0X_0, \\ p_1X_1 &= p_0a_1X_1 + p_1s_1X_1 + w_1L_1 + t_1X_1, \\ p_2X_2 &= p_0a_2X_2 + p_1s_2X_1 + w_2L_2 + t_2X_2, \end{aligned}\right\} \tag{5.2.2}$$

где p_i — цена продукции i-го сектора;

w_i — заработная плата с надбавками в расчете на одного занятого в i-м секторе;

s_i — доля i-го сектора в распределении продукции фондосоздающего сектора, платы и стимулирующих надбавок работникам, на выплату налогов;

t_i — ставка налога на единицу выпуска i-го сектора.

Используя товарную продукцию секторов, стоимостные балансы **(5.2.2)** преобразуем к виду:

$$\left.\begin{aligned} p_0(1-a_0)X_0 &= p_1s_0X_1 + w_0L_0 + t_0X_0, \\ p_1(1-s_1)X_1 &= p_0a_1X_1 + w_1L_1 + t_1X_1, \\ p_2X_2 &= p_0a_2X_2 + p_1s_2X_1 + w_2L_2 + t_2X_2. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.3}$$

Сложим три полученных баланса и перенесем в левую часть все члены, имеющие множителем цены на продукцию секторов:

$$p_0\left[(1-a_0)X_0 - a_1X_1 - a_2X_2\right] + p_1X_1\left(1 - s_0 - s_1 - s_2\right) +$$

$$+ p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i.$$

Поскольку имеют место материальный и инвестиционный балансы

$$(1-a_0)X_0 = a_1X_1 + a_2X_2,$$
$$s_0 + s_1 + s_2 = 1,$$

то коэффициенты при ценах p_0, p_1 равны нулю. В итоге получаем баланс предложения и спроса на предметы потребления:

$$p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i.$$

Таким образом, система стоимостных балансов **(5.2.3)** может быть заменена на эквивалентную ей систему:

$$\begin{cases} p_0(1-a_0)X_0 = p_1s_0X_1 + w_0L_0 + t_0X_0, \\ p_1(1-s_1)X_1 = p_0a_1X_1 + w_1L_1 + t_1X_1, \\ p_2X_2 = \sum\limits_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum\limits_{i=0}^{2} t_iX_i, \end{cases}$$

которая после деления левой и правой частей на L примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &p_0(1-a_0)x_0 = p_1s_0x_1 + w_0\theta_0 + t_0x_0, \\ &p_1(1-s_1)x_1 = p_0a_1x_1 + w_1\theta_1 + t_1x_1, \\ &p_2x_2 = \sum_{i=0}^{2} w_i\theta_i + \sum_{i=0}^{2} t_ix_i, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.2.4)}$$

где $\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ — доля i-го сектора в расходе трудовых ресурсов;

$x_i = \dfrac{X_i}{L}$ — народно-хозяйственная производительность (удельный выпуск) i-го сектора.

Ниже рассматривается модель перераспределения налогового бремени, которая демонстрирует возможности математического моделирования при исследовании рычагов государственного воздействия на экономику.

Экономика исследуется как сбалансированная трехсекторная система, находящаяся в установившемся режиме. Поскольку рассматриваются малые изменения налоговых ставок, то переходными процессами в экономической системе можно пренебречь. Кроме того, будем считать, что при малых изменениях налоговых ставок ставки заработной платы (w_0, w_1, w_2) и, следовательно, распределение трудовых ресурсов между секторами (θ_0, θ_1, θ_2) остаются неизменными. Иными словами, w_0, w_1, w_2, θ_0, θ_1, θ_2 рассматриваются как экзогенные параметры, которые в данной ситуации постоянны.

В таком случае, согласно результатам, полученным выше, сбалансированное состояние трехсекторной экономики в установившемся режиме описывается следующими натурально-стоимостными балансами в расчете на одного занятого в производственной сфере (баланс распределения трудовых ресурсов опущен в соответствии со сделанными предположениями):

- баланс распределения инвестиций —

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1,\ s_i > 0,\ i = 0, 1, 2; \qquad \textbf{(5.2.5)}$$

- материальный баланс —

$$(1 - a_0)x_0 = a_1x_1 + a_2x_2; \qquad \textbf{(5.2.6)}$$

- баланс доходов и расходов материального сектора —

$$p_0(1 - a_0)x_0 = p_1s_0x_1 + w_0\theta_0 + t_0x_0; \qquad \textbf{(5.2.7)}$$

- баланс доходов и расходов фондосоздающего сектора —

$$p_1(1 - s_1)x_1 = p_0a_1x_1 + w_1\theta_1 + t_1x_1; \qquad \textbf{(5.2.8)}$$

- баланс предложения и спроса на предметы потребления[1] —

$$p_2x_2 = \sum_{i=0}^{2}(w_i\theta_i + t_ix_i). \qquad \textbf{(5.2.9)}$$

В стоимостных балансах **(5.2.5)—(5.2.9)** использованы ставки налога на единицу продукции t_0, t_1, t_2. Расчетным путем можно перейти к подушному принципу исчисления налогов, тогда расчетные ставки налогов на одного занятого по секторам примут вид:

$$\hat{t}_i = \frac{t_iX_i}{L_i} = \frac{t_iX_i}{\theta_iL} = \frac{t_ix_i}{\theta_i}, \qquad \textbf{(5.2.10)}$$

где X_i, L_i, K_i — выпуск продукции, число занятых и основные производственные фонды i-го сектора соответственно, при этом выпуск X_i задается как линейно-однородная производственная функция $X_i = F_i(K_i, L_i)$;

L — общее число занятых в производственной сфере.

Общий объем сбора налогов

$$T = \sum_{i=0}^{2} t_iX_i = L\sum_{i=0}^{2} t_ix_i. \qquad \textbf{(5.2.11)}$$

---

[1] Баланс доходов и расходов потребительского сектора не приводится, поскольку он заменен на баланс предложения и спроса на предметы потребления, который представляет собой сумму балансов доходов и расходов трех секторов.

Средний сбор налогов на одного занятого

$$\hat{t} = \frac{T}{L} = \sum_{i=0}^{2} t_i x_i = \sum_{i=0}^{2} \hat{t}_i \theta_i. \qquad \textbf{(5.2.12)}$$

Управляющее воздействие государства в налоговой политике состоит в изменении налоговых ставок от первоначальных значений t_0, t_1, t_2 до новых значений $t_0 + \Delta t_0$, $t_1 + \Delta t_1$, $t_2 + \Delta t_2$. Далее приращения Δt_0, Δt_1, Δt_2 будем рассматривать как бесконечно малые, т.е. в форме дифференциалов dt_0, dt_1, dt_2. Исследование изменений в экономической системе при управляющем воздействии (dt_0, dt_1, dt_2) будет проводиться в удельных показателях.

Назовем *псевдоприращением* (*брутто-приращением*) *налогового бремени на одного занятого* его приращение за счет приростов налоговых ставок при первоначальных удельных выпусках:

$$d\hat{t}^{p} = \sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i. \qquad \textbf{(5.2.13)}$$

В ответ на управляющее воздействие государства dt_0, dt_1, dt_2 секторы изменят свои удельные выпуски на dx_0, dx_1, dx_2.

Назовем *базис-приращением налогового бремени* (*на одного занятого*) его приращение за счет изменения выпусков при неизменных налоговых ставках:

$$d\hat{t}^{b} = \sum_{i=0}^{2} t_i \, dx_i. \qquad \textbf{(5.2.14)}$$

Действительное приращение поступлений налогов в бюджет (в расчете на одного занятого) назовем *нетто-приращением*. Нетто-приращение равно сумме брутто- и базис-приращений:

$$d\hat{t} = \sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i + \sum_{i=0}^{2} t_i \, dx_i = d\hat{t}^{p} + d\hat{t}^{b}. \qquad \textbf{(5.2.15)}$$

Точно так же нетто-приращения налоговых поступлений на одного занятого по секторам равны сумме брутто- и базис-приращений:

$$d\hat{t}_i = x_i \, dt_i + t_i \, dx_i = d\hat{t}_i^{p} + d\hat{t}_i^{b}. \qquad \textbf{(5.2.16)}$$

Известно, что при квадратической функции прибыли ответ фирмы на увеличение налоговой ставки однозначен — сокращение объема выпуска. Из приводимого ниже исследования видно, что реакция секторов сбалансированной экономики на увеличение налоговых ставок не такая однозначная. Все дело в эффекте системы: ведь рассматривается сбалансированная трехсекторная экономика, каждый сектор которой производит не столько, сколько ему захочется, но столько, каков спрос.

Условия сохранения натурально-стоимостной сбалансированности трехсекторной экономики и в измененном состоянии означают с математической точки зрения возможность дифференцировать балансы **(5.2.5)—(5.2.9)**. В результате получаем следующие пять уравнений для ds_0, ds_1, ds_2, dp_0, dp_1, dp_2 (для дифференциалов долей секторов в инвестициях и дифференциалов цен на их продукцию, при этом dx_0, dx_1, dx_2 являются функциями ds_0, ds_1, ds_2):

$$\left.\begin{aligned}
&ds_0 + ds_1 + ds_2 = 0,\\
&(1-a_0)\,dx_0 - a_1\,dx_1 - a_2\,dx_2 = 0,\\
&(1-a_0)x_0\,dp_0 - s_0x_1\,dp_1 + p_0(1-a_0)\,dx_0 - p_1s_0\,dx_1 - t_0\,dx_0 = x_0\,dt_0,\\
&-a_1x_1\,dp_0 + (1-s_1)x_1\,dp_1 - p_0a_1\,dx_1 + p_1(1-s_1)\,dx_1 - t_1\,dx_1 = x_1\,dt_1,\\
&p_2\,dx_2 + dp_2x_2 - \sum_{i=0}^{2} t_i\,dx_i = \sum_{i=0}^{2} x_i\,dt_i.
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(5.2.17)}$$

Таким образом, для шести неизвестных имеется только пять уравнений. Недостающее шестое уравнение вытекает из некоторого определенного предположения о реакции секторов на изменение налоговых ставок.

В целом возможны следующие три случая:

1) $d\hat{t} > 0$ — усиление налогового бремени;

2) $d\hat{t} < 0$ — ослабление налогового бремени;

3) $d\hat{t} = 0$ — перераспределение налогового бремени.

При сделанном нами предположении о неизменности ставок заработной платы наиболее реалистичной гипотезой о поведении секторов является стремление к сохранению статус-кво, т.е. секторы пытаются так изменить свои выпуски, чтобы уровень налогообложения остался неизменным, что создает предпосылки для сохранения ставок заработной платы.

Таким образом, полную модель перераспределения налогового бремени получаем путем добавления к уравнениям **(5.2.17)** условия сохранения уровня налогообложения:

$$d\hat{t} = \sum_{i=0}^{2} x_i\,dt_i + \sum_{i=0}^{2} t_i\,dx_i = 0. \qquad \textbf{(5.2.18)}$$

Условие **(5.2.18)** означает, что чисто фискальные намерения государства, направленные на увеличение объема сбора налогов путем повышения налоговых ставок ($\sum_{i=0}^{2} x_i\,dt_i > 0$) могут быть элиминированы соответствующими изменениями (в основном сокращениями) объемов производства:

$$\sum_{i=0}^{2} t_i\,dx_i = -\sum_{i=0}^{2} x_i\,dt_i < 0.$$

З а м е ч а н и е. Как видно из сказанного выше, уменьшение налоговых ставок для одних секторов при их увеличении для других отнюдь не обязательно приводит к перераспределению налогового бремени.

Исследуем решение системы **(5.2.17)**, **(5.2.18)** в том случае, когда производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа:

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L^{1-\alpha_i}.$$

Тогда (см. гл. 3) стационарная фондовооруженность секторов задается выражениями:

$$k_1^* = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_i = \frac{\theta_1 s_i}{\lambda_i \theta_i} A_1 k_1^{\alpha_1}, \quad i = 0, 2, \tag{5.2.19}$$

а удельные выпуски секторов соответственно равны

$$x_1 = B_1 s_1^{-\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \quad B_1 = \left(\frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \theta_1. \tag{5.2.20}$$

Поэтому дифференциалы удельных выпусков

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\alpha_1 x_1}{1-\alpha_1} \cdot \frac{ds_1}{s_1}, \\ dx_i &= x_i \left(\alpha_i \frac{ds_i}{s_i} + \frac{\alpha_1 \alpha_i}{1-\alpha_1} \cdot \frac{ds_1}{s_1} \right), \quad i = 0, 2. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.21}$$

Таким образом, модель перераспределения налогового бремени примет в этом случае следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
& ds_0 + ds_1 + ds_2 = 0, && (1)\\
& (1-a_0)dx_0 - a_1 dx_1 - a_2 dx_2 = 0, && (2)\\
& (1-a_0)x_0 dp_0 - s_0 x_1 dp_1 + \left[p_0(1-a_0) - t_0\right]dx_0 - p_1 s_0 dx_1 = x_0 dt_0, && (3)\\
& -a_1 x_1 dp_0 + (1-s_1)x_1 dp_1 - p_0 a_1 dx_1 + \left[p_1(1-s_1) - t_1\right]dx_1 = x_1 dt_1, && (4)\\
& x_2 dp_2 + p_2 dx_2 = 0, && (5)\\
& \sum_{i=0}^{2} t_i dx_i = -\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i, && (6)
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.22}$$

где (dx_0, dx_1, dx_2) определяются выражениями **(5.2.21)**.

Поскольку (dx_0, dx_1, dx_2) согласно **(5.2.21)** линейно выражаются через (ds_0, ds_1, ds_2), то шесть линейных уравнений **(5.2.22)** содержат шесть неизвестных ds_0, ds_1, ds_2, dp_0, dp_1, dp_2, которые могут быть, как будет показано ниже, однозначно выражены через управляющие воздействия (dt_0, dt_1, dt_2).

Решения уравнений (1), (2) **(5.2.22)** найдены и исследованы в § 3.3. Данные решения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds_0}{s_0} &= \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2 s_1\delta_2 - \alpha_1 s_2(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)}{\alpha_1 s_0(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)+(1-\alpha_1)\alpha_0 s_1}\cdot\frac{ds_2}{s_2} = \frac{q_0}{q_2}\cdot\frac{ds_2}{s_2}, \\ \frac{ds_1}{s_1} &= -\frac{(1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0\delta_2+\alpha_0 s_2)}{\alpha_1 s_0(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)+(1-\alpha_1)\alpha_0 s_1}\cdot\frac{ds_2}{s_2} = -\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{ds_2}{s_2}, \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(5.2.23)}$$

где $\delta_i = \dfrac{a_i x_i}{(1-a_0)x_0} = \dfrac{a_i X_i}{(1-a_0)X_0}$ — доля i-го сектора ($i = 1, 2$) в расходе товарной продукции материального сектора, при этом $\delta_1+\delta_2=1$;

$q_0 = (1 - \alpha_1)\alpha_2 s_1\delta_2 - \alpha_1 s_2(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)$;

$q_1 = (1 - \alpha_1)(\alpha_2 s_0\delta_2 + \alpha_0 s_2)$;

$q_2 = \alpha_1 s_0(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0) + (1 - \alpha_1)\alpha_0 s_1$.

Уравнения **(5.2.23)** характеризуют перераспределение инвестиционных товаров в условиях сбалансированного распределения продукции материального и фондосоздающего секторов, т.е. при выполнении уравнений (1), (2) **(5.2.22)**. При таком изменении s_0, s_1, s_2 остается только одна степень свободы. Если принять за свободную переменную s_2, то все коэффициенты при ds_2 в **(5.2.23)** становятся функциями только s_2.

Переменная s_2 (доля потребительского сектора в распределении инвестиционных товаров), как отмечалось выше, меняется в пределах

$$0 < s_2 < 1,$$

где $s_2 = 0$ означает ситуацию «производство для производства», а $s_2 = 1$ — ситуацию «деиндустриализация, полный коллапс фондосоздающего производства» ($s_1 = 0$).

В § 3.3 было показано, что при $\alpha_2 \geq \alpha_0$, $q_1(s_2) > 0$, $q_2(s_2) > 0$, $q_0(0) = 0$, $q_0'(0) = +\infty$, $q_0(\hat{s}_2)=0$, $q_0(\bar{s}_2)<0$. Поэтому при росте s_2 от 0 до $\hat{s}_2$ происходит сокращение доли фондосоздающего сектора в использовании своей продукции, в то время как доля материального и потребительского секторов возрастает, а при росте s_2 от $\hat{s}_2$ до $\bar{s}_2$ доли материального и фондосоздающего секторов сокращаются.

Теперь найдем, как изменяются удельные выпуски секторов при изменении s_2 от 0 до 1.

Подставив (5.2.23) в (5.2.21), получим следующие выражения для дифференциалов удельных выпусков:

$$\left.\begin{aligned} dx_0 &= -\alpha_0 x_0 \frac{v_0}{v}\cdot\frac{ds_2}{s_2}, \\ dx_1 &= -\alpha_1 x_1 \frac{v_1}{v}\cdot\frac{ds_2}{s_2}, \\ dx_2 &= -\alpha_2 x_2 \frac{v_2}{v}\cdot\frac{ds_2}{s_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.24)$$

где $v = \alpha_1 s_0(\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0) + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1,$
$v_0 = \alpha_1\alpha_2\delta_2 + s_2\alpha_1\delta_1 - s_1\alpha_2\delta_2,$
$v_1 = \alpha_2 s_0\delta_2 + \alpha_0 s_2,$
$v_2 = \alpha_1\alpha_0 - \alpha_1 s_0\delta_1 - \alpha_0 s_1.$

Исследуем $v(s_2)$ и $v_i(s_2)$, $i = 0, 1, 2$, как функции от s_2 (напомним, что $s_0^0 = s_0(0), s_1^0 = s_1(0)$):

$$\left.\begin{aligned} &v(0) = \alpha_1(1-\alpha_0)s_0^0 + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1^0 > 0, \;\; v(1) = \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_0) > 0, \\ &v_0(0) = 0, \quad v_0(1) = \alpha_1\alpha_2 > 0, \\ &v_1(0) = 0, \quad v_1(1) = \alpha_0 > 0, \\ &v_2(0) = \alpha_1\alpha_0 - \alpha_1 s_0^0 - \alpha_0 s_1^0 < 0, \quad v_2(1) = \alpha_1\alpha_0 > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.25)$$

Таким образом, v, v_0, v_1 сохраняют положительный знак при $0 < s_2 < 1$, поэтому удельные выпуски материального и фондосоздающего секторов сокращаются при росте s_2 от 0 до 1, в то время как v_2 меняет знак с отрицательного на положительный в некоторой промежуточной точке s_2^*:

$$v_2(s_2^*) = \alpha_1\alpha_0 - \alpha_1 s_0(s_2^*)\delta_1(s_2^*) - \alpha_0 s_1(s_2^*) = 0. \qquad (5.2.26)$$

Поэтому в этой точке удельный выпуск предметов потребления $x_2(s_2^*)$ достигает максимума[1] ($dx_2 > 0$ при $0 < s_2 < s_2^*$, $dx_2 < 0$ при $s_2^* < s_2 < \overline{s}_2$).

---

[1] Здесь рассматривается максимум удельного выпуска предметов потребления при изменении s_0, s_1, s_2 и фиксированных $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, в то время как выше рассматривался технологический оптимум — глобальный максимум как по s_0, s_1, s_2, так и по $\theta_0, \theta_1, \theta_2$.

Подставив **(5.2.24)** в уравнение (6) **(5.2.22)**, получим следующее уравнение для $\frac{ds_2}{s_2}$:

$$\left(\sum_{i=0}^{2} \alpha_i \frac{v_i}{v} t_i x_i\right) \frac{ds_2}{s_2} = \sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i,$$

откуда

$$\tilde{v} \frac{ds_2}{s_2} = v \, d\hat{t}^{\,p}, \tag{5.2.27}$$

где $\tilde{v} = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i v_i t_i x_i$, $d\hat{t}^{\,p} = \sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i$,

т.е. в ситуации «перераспределение налогового бремени» приращение доли инвестирования потребительского сектора пропорционально псевдоприращению налогового бремени.

Из **(5.2.27)** видно, что псевдоизменение налогообложения $d\hat{t}^{\,p} = \sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i$ действительно предопределяет изменение состояния трехсекторной экономики. Если брутто-изменения нет, т.е. $\sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i = 0$, то и $ds_2 = 0$, а следовательно, никаких изменений в выпусках и структуре не произойдет. Если же $\sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i \neq 0$, то и $ds_2 \neq 0$, поэтому выпуски и инвестиции изменятся.

5.3. Управление налогообложением для обеспечения сбалансированного экономического роста

Поскольку исследуется модель замкнутой экономики, то единственным источником потребления является собственное производство предметов потребления потребительским сектором. Поэтому именно поведение удельных выпусков секторов определяет потребление.

Регулирующее воздействие государства состоит в изменении налоговых ставок на dt_0, dt_1, dt_2. В § 5.2 было показано (с учетом сделанных предположений), что непосредственное влияние данного воздействия представляется в форме псевдоприращения налогового бремени:

$$d\hat{t}^{\,p} = \sum_{i=0}^{2} x_i \, dt_i.$$

Будем говорить, что произошло ***повышение налогов***, если ***псевдоприращение положительно***, т.е. $d\hat{t} > 0$. В частности, к такой ситуации относится обычное повышение налогов $dt_0 > 0,\ dt_1 > 0,\ dt_2 > 0$.

Поскольку $v > 0,\ d\hat{t} > 0$, то из выражения **(5.2.27)** следует, что знак ds_2 определяется знаком выражения

$$\tilde{v}(s_2) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i v_i(s_2) t_i x_i(s_2). \qquad \textbf{(5.3.1)}$$

При этом $\tilde{v}(0) = 0,\ \tilde{v}(1) = 0$, а из трех слагаемых выражения **(5.3.1)** только последнее может быть отрицательным при $s_2 < \overset{*}{s}_2$, поскольку $v_i(s_2) < 0$ (соответственно для $s_2 \ge \overset{*}{s}_2$ $\tilde{v}(s_2) > 0$).

При изучении знака $\tilde{v}(s_2)$ для $0 < s_2 < \overset{*}{s}_2$ необходимо принять во внимание следующие обстоятельства: с ростом s_2 все функции $v_i(s_2)$ растут, причем $v_i(s_2) < 0$, $v_2(\overset{*}{s}_2) = 0$. Удельный выпуск $x_0(s_2)$ вначале растет, затем достигает максимума при $s_2 = \tilde{s}_2^*$, после чего убывает, а $x_2(s_2)$ растет. Поэтому вблизи $s_2 = 0$, вообще говоря, возможно $\tilde{v}(s_2) < 0$. Однако в большинстве практически интересных случаев s_2 существенно отличается от нуля (ведь ситуация $s_2 = 0$ — это «производство для производства»), поэтому $v(s_2) > 0$ при $s_2 > \underline{s_2}(\tilde{v}(\underline{s_2}) = 0)$. Так, в ситуации примера 5.1 $\tilde{v}(s_2) > 0$ на всем интервале (0, 1).

Итак, при $\tilde{v} > 0$ ***увеличение налогов*** $\left(\sum_{i=0}^{2} x_i\, dt_i > 0\right)$ ***приводит к переливу инвестиционных ресурсов в потребительский сектор*** ($ds_2 > 0$), ***поэтому при*** $s_2 < \overset{*}{s}_2$ ***это имеет следствием увеличение производства потребительских товаров***, а при $s_2 > \overset{*}{s}_2$ — ***сокращение производства***.

Производство инвестиционных товаров при увеличении налогов сокращается, поскольку перелив инвестиционных ресурсов в потребительский сектор ($ds_2 > 0$) осуществляется прежде всего за счет фондосоздающего сектора $\left(\frac{ds_1}{s_1} = -\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{ds_2}{s_2},\quad q_1 > 0,\ q_2 > 0\right)$. Производство материалов при $s_2 > \tilde{s}_2^*$ также сокращается, хотя налоговая нагрузка на секторы, производящие средства производства, может и уменьшиться.

В самом деле, ситуация «перераспределение налогового бремени» характеризуется равенством:

$$(x_0\ dt_0 + t_0\ dx_0) + (x_1\ dt_1 + t_1\ dx_1) + (x_2\ dt_2 + t_2\ dx_2) = 0, \qquad \textbf{(5.3.2)}$$

в котором каждая из скобок — действительное изменение налогового бремени на соответствующий сектор.

Пусть, например, увеличение налогов $(\sum_{i=0}^{2} x_i\ dt_i > 0)$ произошло главным образом за счет увеличения налоговой ставки на выпуск потребительского сектора $(dt_2 > 0)$ (при этом dt_0, dt_1 могут быть даже отрицательными!), тогда при $s_2 < s_2^*$ и $dx_2 > 0$. Поэтому

$$x_2\ dt_2 + t_2\ dx_2 > 0,$$

и для выполнения равенства **(5.3.2)** необходимо

$$(x_0\ dt_0 + t_0\ dx_0) + (x_1\ dt_1 + t_1\ dx_1) < 0,$$

т.е. налоговое бремя на секторы, производящие средства производства, ослабело, хотя производство этих секторов, как отмечалось выше, сократилось! Это результат эмерджентности системы.

В примере 5.1 анализируется ситуация, весьма сходная с ситуацией, сложившейся в экономике Российской Федерации в начале 1990-х гг.

▷ **Пример 5.1.** ***Влияние повышения налогов на производство.*** В этом примере использованы производственные функции секторов экономики Российской Федерации, найденные по данным 1960—1991 гг. в ценах 1983 г. Коэффициенты функций Кобба—Дугласа секторов согласно этим данным (см. также § 2.2):

$$A_0 = 6{,}19, \quad A_1 = 1{,}35, \quad A_2 = 2{,}71;$$

$$\alpha_0 = 0{,}46, \quad \alpha_1 = 0{,}68, \quad \alpha_2 = 0{,}49.$$

Коэффициенты прямых материальных затрат, найденные путем агрегирования межотраслевых балансов Российской Федерации 1985—1987 гг.:

$$a_0 = 0{,}39, \quad a_1 = 0{,}29, \quad a_2 = 0{,}52.$$

Фактические структурные коэффициенты экономики РФ в 1980-х гг.:

$$\theta_0 = 0{,}3, \quad \theta_1 = 0{,}14, \quad \theta_2 = 0{,}56;$$

$$s_0 = 0{,}56, \quad s_1 = 0{,}14, \quad s_2 = 0{,}3.$$

Примем также $\lambda = 0{,}05$.

Тогда удельные выпуски секторов в стационарном состоянии согласно результатам § 3.3 и приведенным выше данным (распределение трудовых ресурсов фиксировано и равно фактическому, распределение инвестиционных ресурсов свободно)

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 150{,}1\left[(1-h)(1-s_1)\right]^{0,46} s_1^{0,978}, \\
&x_1 = 209{,}8 s_1^{2,125}, \\
&x_2 = 120{,}3\left[h(1-s_1)\right]^{0,49} s_1^{1,041},
\end{aligned}
\qquad \textbf{(5.3.3)}
$$

где $h = h(s_1)$ — доля потребительского сектора в остаточных инвестиционных ресурсах, доставшихся материальному и потребительскому секторам, определяемая из уравнения материального баланса:

$$0{,}61x_0 = 0{,}29x_1 + 0{,}52x_2. \qquad \textbf{(5.3.4)}$$

Таким образом, распределение инвестиционных ресурсов задается в следующей форме:

$$s_0 = (1-h)(1-s_1), \quad s_1, \quad s_2 = h(1-s_1). \qquad \textbf{(5.3.5)}$$

Следует заметить, что пример составлен так, что свободной переменной служит s_1, в то время как теоретическое изложение проведено при выборе в качестве свободной переменной s_2. Это приводит к аналогичным результатам, поскольку между указанными переменными существует взаимно однозначное соответствие: $s_1 = s_1(s_2)$, $s_2 = s_2(s_1) = h(s_1)(1-s_1)$, но зато позволяет более объемно представить всю картину изменения удельных выпусков и долей секторов в ресурсах (результаты расчетов по формулам **(5.3.3)**—**(5.3.5)** представлены в табл. 5.1).

Из табл. 5.1 видно, что оптимальное значение $\overset{*}{s}_2$ и точка перелома в распределении инвестиционных ресурсов $\hat{s}_2$ совпадают: $\hat{s}_2 = \overset{*}{s}_2 = 0{,}22$, максимум удельного выпуска материалов достигается при $s_2 = 0{,}01$.

В последних строках табл. 5.1 приведены значения вспомогательных величин, необходимых для расчета $\tilde{v}$. Расчет проводился по формулам **(5.2.24)**, в которых $\delta_1 = \dfrac{a_1 x_1}{(1-a_0)x_0}$ — доля фондосоздающего сектора в расходе товарной продукции материального сектора. Итоговые расчеты ставки (рублей в текущих ценах) на рубль продукции секторов в неизменных ценах 1983 г. одинаковы:

$$t_0 = t_1 = t_2 = t.$$

Из табл. 5.1 следует, что при сделанном предположении относительно налоговых ставок $\tilde{v}(s_2) > 0$ на всем интервале (0, 1) изменения s_2. Поэтому согласно формуле **(5.2.27)** увеличение налогов всегда будет сопровождаться переливом инвестиционных ресурсов в потребительский сектор. Согласно данным примера фактическое значение $s_2 = 0,3$, т.е. $s_2 > \overset{*}{s_2} = 0,22$, поэтому перелив ресурсов в потребительский сектор приводит к падению объемов производства предметов потребления. При этом производство средств производства также сократится, хотя налоговая нагрузка на соответствующие секторы уменьшится. ▶

Таблица 5.1. ***Изменение удельных выпусков (тыс. руб./чел.[1]) и долей секторов в инвестиционных ресурсах в зависимости от*** s_1

s_1	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,46	0,50	0,60	0,70	0,78
h	1	0,72	0,66	0,58	0,48	0,41	0,37	0,24	0,08	0
s_0	0	0,25	0,27	0,29	0,31	0,32	0,31	0,30	0,28	0,22
s_2	1	0,65	0,53	0,41	0,29	0,22	0,19	0,10	0,02	0
x_0	0	8,40	17,10	26,30	35,80	40,90	44,80	52,70	58,60	58,60
x_1	0	1,60	6,90	16,20	29,90	38,90	48,10	70,90	98,30	123,70
x_2	0	8,90	16,40	22,10	25,20	25,70	25,60	22,40	13,30	0
δ_1	0	0,09	0,19	0,29	0,40	0,46	0,51	0,64	0,80	1
v_0	0,33	0,30	0,26	0,20	0,16	0,13	0,11	0,06	0,01	0
v_1	0,46	0,41	0,35	0,27	0,22	0,19	0,16	0,10	0,04	0
v_2	0,31	0,25	0,19	0,12	0,05	0	−0,03	−0,10	−0,16	−0,20
$\tilde{v}/t$	0	2,68	5,17	5,93	7,75	7,54	7,15	5,04	2,20	0

Перейдем теперь к рассмотрению изменения цен. Начнем с изменения цены потребительского сектора. Из уравнения (5) системы **(5.2.22)** находим

$$dp_2 = -p_2 \frac{dx_2}{x_2},$$

откуда видно, что при возрастании объема объема выпуска предметов потребления и при $s_2 < \overset{*}{s_2}$ цена на них падает. Следует заметить, что в ситуации «усиление налогового бремени» (т.е. при $d\hat{t} > 0$) из уравнения (6) системы **(5.2.22)** видно, что

[1] В ценах 1983 г.

$$dp_2 = -p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \frac{d\hat{t}}{x_2},$$

так что даже при возрастании объема выпуска предметов потребления цена на них может увеличиваться, если удельный прирост налогового бремени превышает стоимость прироста производства предметов потребления, т.е. $d\hat{t} > p_2\, dx_2$.

Изменения цен на продукцию материального и фондосоздающего секторов определяем, решая относительно dp_0, dp_1 систему линейных уравнений (3), (4) **(5.2.22)**:

$$\left.\begin{aligned}
dp_0 &= \frac{(1-s_1)x_1\left[-(1-a_0)x_0+t_0\right]dx_0 + s_0x_1\left(a_1p_0+t_1\right)dx_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1\cdot s_0x_1} + \\
&\quad + \frac{(1-s_1)x_1x_0\; dt_0 + s_0x_1^2\; dt_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1\cdot s_0x_1}, \\
dp_1 &= \frac{a_1x_1\left[-(1-a_0)p_0+t_0\right]dx_0}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1\cdot s_0x_1} + \\
&\quad + \frac{\left[(1-a_0)x_0\left(-(1-s_1)p_1+a_1p_0+t_1\right)+a_1x_1p_1s_0\right]dx_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1\cdot s_0x_1} + \\
&\quad + \frac{a_1x_1x_0\; dt_0 + (1-a_0)x_0x_1\; dt_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1x_1\cdot s_0x_1}.
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.3.6)}$$

Знаменатель в обоих равенствах **(5.3.6)** положителен, поскольку $(1-a_0)x_0 > a_1x_1$ и $(1-s_1) > s_0$, поэтому знаки изменений цен определяются знаками числителей.

Из **(5.3.6)** видно, что наиболее распространен случай возрастания цен на продукцию материального и фондосоздающего секторов, но также возможна ситуация, когда цена одного из этих секторов (или даже сразу двух) падает.

В самом деле, поскольку $dx_0 < 0$, $dx_1 < 0$, то первые слагаемые числителей, содержащие множителем $dx_0 < 0$, всегда неотрицательны, так как

$$-(1-a_0)p_0 + t_0 = -\left(p_1s_0 + \frac{\theta_0 w_0}{x_0}\right) \le 0,$$

а вторые слагаемые, содержащие множителем $dx_1 < 0$, могут быть как положительными, так и отрицательными. Последние слагаемые, содержащие dt_0 и dt_1, могут быть и положительными.

В заключение скажем несколько слов о ситуации «усиление (ослабление) налогового бремени». Прежде всего хотелось бы обратить внимание на то, что тип ситуации определяется не решением повысить или снизить налоги, а состоянием экономики. Если экономика недогружена, то повышение налогов приводит к усилению налогового бремени. Если экономика загружена по полной норме, то повышение налогов ведет к перераспределению налогового бремени. И, наконец, если экономика перегружена, то она реагирует на повышение налогов резким снижением производства и уходом от налогов, в результате чего налоговое бремя ослабляется, а бюджетные поступления сокращаются вместо ожидаемого повышения. Таким образом, решение об увеличении налогов — лишь сигнал к тому, чтобы выяснить, в какой же реальной ситуации находится экономика.

Как же моделировать ситуацию «повышение налогового бремени»? На наш взгляд, можно ввести коэффициент «бюджетных ожиданий» $\beta\,(0<\beta<1)$, который показывает, какая часть брутто-повышения налогов оправдалась:

$$d\hat{t}=\sum_{i=0}^{2}\left(x_i\,dt_i+t_i\,dx_i\right)=\beta\sum_{i=0}^{2}x_i\,dt_i. \tag{5.3.7}$$

Из **(5.3.7)** следует, что

$$\sum_{i=0}^{2}t_i\,dx_i=(1-\beta)\sum_{i=0}^{2}x_i\,dt_i. \tag{5.3.8}$$

Поэтому все выкладки, приведенные выше в предположении, что распределение трудовых ресурсов неизменно и $\beta=0$ («перераспределение налогового бремени») приведут в итоге к соотношению — аналогу **(5.2.27)**:

$$\tilde{v}\frac{ds_2}{s_2}=(1-\beta)\sum_{i=0}^{2}x_i\,dt_i. \tag{5.3.9}$$

Как видим, соотношение **(5.3.9)** при $\beta=0$ переходит в **(5.2.27)**, а при $\beta=1$ (все «бюджетные ожидания» оправдались) приводит к $ds_2=0$, что означает отсутствие перелива ресурсов и изменений в производстве.

Все рассуждения, приведенные выше, благодаря соотношению **(5.3.9)** остаются в силе при $\beta<1$.

Вопросы и задания

1. В каком соотношении находятся псевдоприращение, базис-приращение и действительное приращение налогового бремени?
2. Каковы условия роста выпуска предметов потребления при увеличении налоговых ставок в трехсекторной экономике?
3. Можно ли условия задания 2, полученные в ситуации «перераспределение налогового бремени», переносить на ситуацию «рост налогового бремени»?
4. Как должна быть трансформирована модель замкнутой трехсекторной экономики для отражения таможенной политики?

III

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С МИРОВОЙ ЭКОНОМИКОЙ

6

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКРЫТОЙ ТРЕХСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ[1]

В настоящей главе рассматривается модель взаимодействия трехсекторной экономики с мировым рынком. Изучаются переходные процессы и стационарные состояния открытой трехсекторной экономики. Предполагается, что собственное производство и импорт агрегированного товара можно складывать, как части одинакового стандартного качества, кроме того, по каждому товару рассматривается только чистый вывоз или чистый ввоз.

6.1. Открытая трехсекторная модель экономики. Переходные процессы и стационарные состояния

При формировании открытой трехсекторной модели экономики наряду с предположениями, положенными в основу замкнутой трехсекторной модели (см. § 2.1), используются также допущения, сформулированные выше. Итогом введения внешней торговли в трехсекторную модель экономики являются следующие изменения в модели:

1) в приходной части инвестиционного баланса появится слагаемое Y_1 — ввоз инвестиционных товаров;

2) в расходной части материального баланса добавится слагаемое Y_0 — вывоз материалов;

3) на потребительский рынок наряду с собственным производством X_2 поступит также импорт предметов потребления Y_2;

4) добавится внешнеторговый баланс.

В результате модель открытой трехсекторной экономики в абсолютных показателях приобретет следующий вид (все обозначения, касающиеся национальной экономики, приведены в § 2.1):

- технологический уклад в форме линейно-однородных ПФ —

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2; \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

- динамика общего числа занятых —

$$L = L(0)e^{\nu t}; \qquad \textbf{(6.1.2)}$$

---

[1] Все результаты, приведенные в главе, получены автором и опубликованы в книгах и статьях, указанных в библиографическом списке.

• динамика ОПФ секторов —

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \quad K_i|_{t=0} = K_i(0), \ i = 0, 1, 2; \tag{6.1.3}$$

• трудовой баланс —

$$L = L_0 + L_1 + L_2; \tag{6.1.4}$$

• инвестиционный баланс —

$$X_1 + Y_1 = I_0 + I_1 + I_2; \tag{6.1.5}$$

• материальный баланс —

$$(1 - a_0)X_0 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + Y_0; \tag{6.1.6}$$

• внешнеторговый баланс —

$$q_0 Y_0 = q_1 Y_1 + q_2 Y_2, \tag{6.1.7}$$

где q_0, q_1, q_2 — мировые цены на продукцию материального, фондосоздающего и потребительского секторов.

Замечание. Внешнеторговый баланс составлен для страны с сырьевой направленностью экономики. Однако его можно использовать для моделирования экономики любой страны, имеющей в своем составе материальные и обрабатывающие отрасли, если допустить возможность отрицательности показателей внешней торговли. Так, $Y_0 < 0$ означает импорт материалов, $Y_1 < 0$ — экспорт инвестиционных товаров, $Y_2 < 0$ — экспорт потребительских товаров.

Так же, как и в § 2.1, введем следующие относительные показатели:

$\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ — доля i-го сектора в распределении трудовых ресурсов;

$s_i = \dfrac{I_i}{X_1 + Y_1}$ — доля i-го сектора в распределении инвестиционных ресурсов;

$f_i(k_i) = \dfrac{F_i(K_i, L_i)}{L_i}$ — отраслевая производительность i-го сектора;

$x_i = \dfrac{X_i}{L}$ — народно-хозяйственная производительность i-го сектора;

$k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ — фондовооруженность в расчете на одного занятого в i-м секторе;

$y_0 = \dfrac{Y_0}{L}$ — вывоз материалов в расчете на одного занятого;

$y_1 = \dfrac{Y_1}{L}$ — ввоз инвестиционных товаров в расчете на одного занятого;

$y_2 = \dfrac{Y_2}{L}$ — ввоз потребительских товаров в расчете на одного занятого.

Тогда открытая трехсекторная модель экономики в относительных показателях запишется следующим образом:

$$x_i = \theta_i f_i(k_i), \quad i = 0, 1, 2; \tag{6.1.8}$$

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i}(x_1 + y_1), \quad \lambda_i = \mu_i + \nu,$$
$$k_i(0) = \frac{K_i(0)}{\theta_i L(0)}, \quad i = 0, 1, 2; \tag{6.1.9}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2; \tag{6.1.10}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2; \tag{6.1.11}$$

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + y_0, \quad y_0 \geq 0; \tag{6.1.12}$$

$$q_0 y_0 = q_1 y_1 + q_2 y_2, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \tag{6.1.13}$$

В приведенной записи модели внутренние стоимостные балансы не рассматриваются, поскольку их форма зависит от типа поведения секторов, т.е. от того, действуют они в сотрудничестве или конкурируют друг с другом. Эти проблемы рассматриваются ниже, в § 6.3.

Уравнения **(6.1.9)** имеют стационарное решение

$$k_i^E = \frac{s_i(x_1^E + y_1)}{\lambda_i \theta_i}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{6.1.14}$$

где $x_1^E = \theta_1 f_1(k_1^E)$.

Если производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа

$$F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i},$$

то данное решение примет вид:

$$k_1^E - \frac{s_1}{\lambda_1} A_1 (k_1^E)^{\alpha_1} = \frac{s_1 y_1}{\lambda_{.} \theta_1}, \quad x_1^E = \partial_1 A_1 (k_1^E)^{\alpha_1}, \tag{6.1.15}$$

$$k_i^E = \frac{s_i(x_1^E + y_1)}{\lambda_1 \theta_1}, \quad i = 0, 2.$$

При этом удельные выпуски секторов запишутся следующим образом (индекс стационарного решения опущен):

$$x_i = B_i \theta_i^{1-\alpha_i} s_i^{\alpha_i} (x_1 + y_1)^{\alpha_i}, \quad B_i = \frac{A_i}{\lambda^{\alpha_i}}, \quad i = 0, 1, 2. \qquad \textbf{(6.1.16)}$$

Следует заметить, что константы B_i в соотношении **(6.1.16)** отличаются от констант B_i, использованных в замкнутой трехсекторной модели экономики.

Переходные процессы в открытой трехсекторной модели экономики задают решения уравнений **(6.1.9)**. Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений для замкнутой трехсекторной модели экономики наличием в правой части каждого уравнения дополнительного слагаемого $\frac{s_i}{\theta_i} y_1$. Поэтому при фиксированных параметрах распределения трудовых и инвестиционных ресурсов и благоприятной конъюнктуре внешнего рынка (т.е. при $\frac{q_1}{q_0} < 1$, $\frac{q_2}{q_0} < 1$) эти решения будут больше соответствующих решений для замкнутой модели экономики. Но характер решений (переходных процессов) будет тем же самым: разности между текущими значениями решений и значениями соответствующих стационарных решений экспоненциально убывают.

В заключение скажем несколько слов о компонентах внешней торговли (y_0, y_1, y_2) в расчете на одного занятого. Для страны с достаточно развитой обрабатывающей промышленностью, но сырьевой направленностью экономики, основной компонентой является y_1 — ввоз инвестиционных товаров (главным образом, машин и оборудования). В ответ вывозятся материалы (главным образом, топливо, электроэнергия, сырье) в объеме y_0. Ввоз потребительских товаров можно рассматривать как нагрузку на ввоз инвестиционных товаров.

Введем *параметр нагрузки*

$$\gamma = \frac{q_2 y_2}{q_1 y_1}$$

— ввоз потребительских товаров (долл.) на 1 долл. ввоза инвестиционных товаров, тогда

$$y_2 = \gamma \frac{q_1}{q_2} y_1, \qquad \textbf{(6.1.17)}$$

поэтому из внешнеторгового баланса следует

$$y_0 = (1+\gamma) \frac{q_1}{q_0} y_1. \qquad \textbf{(6.1.18)}$$

Таким образом, при фиксированном значении параметра нагрузки γ все компоненты внешней торговли выражаются через компоненту y_1 как ведущую.

6.2. Оптимальное распределение ресурсов

Под ***оптимальным распределением ресурсов*** понимается такой выбор структурных и внешнеторговых параметров (θ, s, y), при котором выполнены все балансы и удельное потребление максимально.

Удельное потребление формируется как сумма собственного производства и импорта потребительских товаров в расчете на одного занятого. Задача ставится и решается в стационарном состоянии и удельных показателях.

Модель открытой трехсекторной экономики в стационарном состоянии, с производственными функциями Кобба—Дугласа и в удельных показателях согласно § 6.1 можно записать следующим образом:

- народно-хозяйственная производительность секторов —

$$x_i = B_i\theta_i^{1-\alpha_i} s_i^{\alpha_i} s_i^{\alpha_i}(x_1 + y_1)^{\alpha_i}, \quad B_i = A_i\lambda_i^{-\alpha_i}, \quad i = 0, 1, 2; \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

- трудовой баланс —

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \ \theta_i \ge 0; \qquad \textbf{(6.2.2)}$$

- инвестиционный баланс —

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \ s_i \ge 0; \qquad \textbf{(6.2.3)}$$

- материальный баланс —

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + y_0; \qquad \textbf{(6.2.4)}$$

- внешнеторговый баланс —

$$q_0 y_0 = q_1 y_1 + q_2 y_2, \qquad \textbf{(6.2.5)}$$

где y_0 — удельный вывоз материалов;

y_1, y_2 — удельный ввоз инвестиционных и потребительских товаров;

q_0, q_1, q_2 — цены мирового рынка на материалы, инвестиционные и потребительские товары;

a_0, a_1, a_2 — коэффициенты прямых материальных затрат материального, фондосоздающего и потребительского секторов.

В этой модели управляющими переменными служат $(\theta, s, y) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2, y_0, y_1, y_2)$. Указанные девять переменных связаны четырьмя балансовыми соотношениями **(6.2.2)—(6.2.5)**, поэтому в их изменении имеется пять степеней свободы. Эти степени свободы можно использовать для такого выбора управляющих переменных, который обеспечивает максимум удельного потребления:

$$c(\theta, s, y) = x_2(\theta, s, y) + y_2.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\max_{(\theta, s, y)} \left[B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} s_2^{\alpha_2} (x_1 + y_1)^{\alpha_2} + y_2 \right], \tag{6.2.6}$$

при выполнении ограничений **(6.2.2)—(6.2.5)**, в которых $x_i = x_i(\theta, s, y)$ задаются соотношениями **(6.2.1)**.

С помощью введения пяти свободных переменных (по числу степеней свободы) сведем задачу нелинейного программирования к задаче нахождения безусловного максимума функции пяти переменных.

В связи с ведущей ролью инвестиций в развитии экономики в число свободных переменных целесообразно включить θ_1, s_1 (определяют собственное производство инвестиционных товаров) и y_1 (удельный импорт инвестиционных товаров).

Если установлены доли ресурсов θ_1, s_1, направляемых в фондосоздающий сектор, то при выполнении балансовых уравнений **(6.2.2), (6.2.3)** материальному и потребительскому секторам остается $(1-\theta_1)$ трудовых и $(1-s_1)$ инвестиционных ресурсов. Введем переменные h, l, характеризующие распределение этих остаточных ресурсов между материальным и потребительским секторами:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= (1-lh)(1-\theta_1), \quad & \theta_2 &= lh(1-\theta_1), \\ s_0 &= (1-h)(1-s_1), \quad & s_2 &= h(1-s_1), \end{aligned}\right\} \tag{6.2.7}$$

где lh, h — доли потребительского сектора в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов, доставшихся материальному и потребительскому секторам (причем l можно интерпретировать как относительную трудообеспеченность инвестиционных ресурсов, направляемых в потребительский сектор).

При любых l, $h\,(0 \le h \le 1)$ определяемое ими распределение ресурсов удовлетворяет трудовому и инвестиционному балансам. При этом удельные выпуски материального и потребительского секторов преобразуются к виду:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B_0 (1-lh)^{1-\alpha_0} (1-h)^{\alpha_0} (1-\theta_1)^{1-\alpha_0} (1-s_1)^{\alpha_0} (x_1 + y_1)^{\alpha_0}, \\ x_2 &= B_2 l^{1-\alpha_2} h (1-\theta_1)^{1-\alpha_2} (1-s_1)^{\alpha_2} (x_1 + y_1)^{\alpha_2}, \end{aligned}\right\} \tag{6.2.8}$$

поэтому материальный баланс примет следующую форму:

$$\left.\begin{aligned}&(1-a_0)B_0(1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0}=\\&=a_1x_1+a_2B_2l^{1-\alpha_2}h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)^{\alpha_2}+y_0,\end{aligned}\right\}\qquad(6.2.9)$$

где $x_1=x_1(\theta_1,s_1,y_1)$ — решение уравнения $x_1=B_1\theta_1^{1-\alpha_1}s_1^{\alpha_1}(x_1+y_1)^{\alpha_1}$.

Левая часть **(6.2.9)** является убывающей функцией h, обращающейся в нуль при $h=1$, а правая часть — линейной возрастающей функцией h, поэтому **(6.2.9)** имеет единственное решение $h=h(l,\theta_1,s_1,y_0,y_1)$, если

$$(1-a_0)B_0(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0}\geq a_1x_1+y_0.\qquad(6.2.10)$$

Таким образом, если условие **(6.2.10)** имеет место, то выбором h можно обеспечить выполнение материального баланса при любых неотрицательных значениях l. Поэтому в число свободных переменных целесообразно включить l.

Удельные значения ввоза-вывоза y_0, y_1, y_2 связаны внешнеторговым балансом **(6.2.5)**, при этом в число свободных переменных уже введен удельный ввоз инвестиционных товаров y_1. Поскольку конечная цель экономики — производство потребительских товаров, то еще за одну свободную переменную разумно принять ввоз потребительских товаров в долларах на 1 долл. ввоза инвестиционных товаров (или в рублях на 1 руб.):

$$\gamma=\frac{q_2y_2}{q_1y_1}.\qquad(6.2.11)$$

Тогда удельный экспорт материалов и удельный импорт предметов потребления будут следующим образом выражены через свободные переменные y_1, γ (см. также § 6.1):

$$y_0=b_0(1+\gamma)y_1,\quad y_2=b_2\gamma y_1,\qquad(6.2.12)$$

где $b_0=\dfrac{q_1}{q_0}$ — коэффициент, показывающий, на сколько рублей надо продать материалов, чтобы купить инвестиционных товаров на один рубль;

$b_2=\dfrac{q_1}{q_2}$ — коэффициент, показывающий, на сколько рублей надо продать предметов потребления, чтобы купить инвестиционных товаров на один рубль.

При переходе к свободным переменным решение задачи нелинейного программирования **(6.2.6)** сводится к нахождению безусловного экстремума функции от пяти свободных переменных:

$$\max_{(l,\theta_1,s_1,y_1,\gamma)} B_2 l^{1-\alpha_2} h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)^{\alpha_2}+b_2\gamma y_1, \qquad \textbf{(6.2.13)}$$

где $h=h(l,\theta_1,s_1,y_1,\gamma)$ — решение уравнения

$$\left.\begin{aligned}&(1-a_0)B_0(1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0}=\\&=a_1x_1+a_2B_2l^{1-\alpha_2}h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)+b_0(1+\gamma)y_1,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(6.2.14)}$$

а $x_1=x_1(\theta_1,s_1,y_1)$ — решение уравнения

$$x_1=B_1\theta_1^{1-\alpha_1}s_1^{\alpha_1}(x_1+y_1)^{\alpha_1},$$

$$0<l<\infty,\ \ 0<\theta_1\le 1,\ \ 0<s_1\le 1,\ \ 0\le y_1<\infty,\ \ 0<\gamma<\infty.$$

В такой постановке можно оптимизировать удельное потребление по любому набору свободных переменных. Ниже рассмотрим наиболее рациональный выбор структурной политики, а также объема и структуры внешней торговли.

«Золотое» правило распределения ресурсов

В данном контексте под ресурсами подразумевается живой труд в объеме L и инвестиционные ресурсы в объеме X_1+Y_1. Если свободные переменные $(l,\theta_1,s_1,y_1,\gamma)$ заданы, то уравнения **(6.2.7)** и **(6.2.14)** однозначно определяют распределение ресурсов между секторами.

Для определения «золотого» правила находим и приравниваем нулю производные удельного потребления $c=x_2+b_2\gamma y_1$ по свободным переменным l,θ_1,s_1:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial l}&=\frac{\partial x_2}{\partial l}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial l}=0,\\ \frac{\partial c}{\partial \theta_1}&=\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial \theta_1}=0,\\ \frac{\partial c}{\partial s_1}&=\frac{\partial x_2}{\partial s_1}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s_1}=0.\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(6.2.15)}$$

Производные h находим путем дифференцирования соотношения **(6.2.14)** по соответствующей переменной:

$$\frac{\partial h}{\partial l}=-\frac{h(1-h)\left[(1-\alpha_0)lh(1-a_0)x_0+(1-\alpha_2)(1-lh)a_2x_2\right]}{l\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},$$

$$\alpha = \alpha_0 + (1-\alpha_0)l,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = \frac{(1-\alpha_1)h(1-h)(1-lh)\left\{\left[\alpha_0 - \left(1+\frac{(1-\alpha_0)y_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right)\theta_1\right](1-a_0)x_0\right.}{\theta_1(1-\theta_1)\left(1-\alpha_1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]} +$$

$$+\frac{\left.\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)(1-\theta_1)a_1x_1 - \left[\alpha_2 - \left(1+\frac{(1-\alpha_2)y_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right)\theta_1\right]a_2x_2\right\}}{\theta_1(1-\theta_1)\left(1-\alpha_1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},$$

$$\frac{\partial h}{\partial s_1} = \frac{h(1-h)(1-lh)\left[\alpha_0 b(1-a_0)x_0 - \alpha_1\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)(1-s_1)a_1x_1 - \alpha_2 b a_2 x_2\right]}{s_1(1-s_1)\left(1-\alpha_1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},$$

где $b = \alpha_1 - \left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)s_1$.

После проведения всех выкладок окончательно находим неявные уравнения для определения оптимальных значений свободных переменных («золотое» правило):

$$\left.\begin{aligned}
l^* &= \frac{\alpha_0(1-\alpha_2)}{\alpha_2(1-\alpha_0)-(\alpha_2-\alpha_0)h},\\
\theta_1^* &= \frac{\left[\alpha_2 h(\alpha-lh)+\alpha_0(1-h)(1-lh)\right]-(1-h)(1-lh)\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\delta_1}{\left(1+\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\cdot\frac{y_1}{x_1}\right)h(\alpha-lh)+\left(1+\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}\cdot\frac{y_1}{x_1}\right)h(1-h)-(1-h)(1-lh)\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\delta_1},\\
s_1^* &= \alpha_1\frac{\left[\alpha_2 h(\alpha-lh)+\alpha_0(1-h)(1-lh)\right]\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)^{-1}-\delta_1}{\left[\alpha_2 h(\alpha-lh)+\alpha_0(1-h)(1-lh)\right]-\alpha_1\delta_1},
\end{aligned}\right\} \quad (6.2.16)$$

где $\delta_1 = \frac{a_1x_1}{(1-a_0)x_0}$ — доля фондосоздающего сектора в распределении товарной продукции материального сектора.

Уравнения **(6.2.16)** являются действительно неявными для соответствующих переменных, поскольку содержащиеся в правой части этих уравнений x_1, h, δ_1 являются функциями свободных переменных. Каждое из уравнений может быть решено методом последовательных приближений.

Принципиальное значение этих уравнений состоит в том, что само их существование показывает бесперспективность чрезмерного развития одних секторов в ущерб другим. Так, переток ресурсов в фондосоздающий сектор вначале приводит к росту выпуска предметов потребления, но по достижении оптимальных значений θ_1^*, s_1^* дальнейшая «подпитка» сектора ресурсами приводит к сокращению выпуска потребительских товаров, хотя выпуск инвестиционных товаров по-прежнему будет расти. Этот факт, как видим, непосредственно вытекает из «золотого» правила, но первопричиной его является эмерджентность экономической системы, что отражено в модели через балансовые соотношения.

Из уравнений **(6.2.16)** можно непосредственно получить различные макроэкономические рекомендации. Укажем в качестве примера на две из них:

1) если $\alpha_0 < \alpha_2$ (материальный сектор менее технологически развит, чем потребительский), то $l^* < 1$, что означает меньшую долю потребительского сектора в трудовых ресурсах по сравнению с его долей в инвестиционных ресурсах, в то время как на практике наблюдается совершенно противоположный феномен;

2) оптимальные доли фондосоздающего сектора в трудовых и инвестиционных ресурсах напрямую зависят от $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{Y_1}{X_1}$, т.е. от соотношения импорта и собственного выпуска инвестиционных товаров.

«Золотое» правило внешней торговли

Из свободных переменных непосредственно внешнюю торговлю характеризуют д в е:

1) y_1 — ввоз инвестиционных товаров в расчете на одного занятого, или уровень внешней торговли;

2) γ — нагрузка, ввоз предметов потребления в долларах (рублях) в расчете на 1 долл. (1 руб.) ввоза инвестиционных товаров, или показатель структуры внешней торговли.

Выкладки, подобные проделанным выше, приводят к следующему уравнению для определения оптимального уровня внешней торговли:

$$y_1^* = \frac{\left[\alpha_1\delta_1 - (\alpha_0 + \alpha_2 \frac{\varepsilon}{1-h})\right]x_2}{(\beta_2 - \frac{\beta_0}{a_2})\delta_2 + \beta_2\varepsilon} - (1-\alpha_1)x_1, \qquad \textbf{(6.2.17)}$$

где $\varepsilon = \frac{h(\alpha - lh)}{(1-h)(1-lh)}$ — безразмерная величина, $0 \le \varepsilon < \infty$;

$$\alpha = \alpha_0 + (1-\alpha_0)l;$$

$h = h(l, \theta_1, s_1, y_1, \gamma)$ — решение уравнения материального баланса;

δ_1, δ_2 — доли фондосоздающего и потребительского секторов в расходе товарной продукции материального сектора;

$\beta_0 = \frac{q_1}{q_0}(1+\gamma)$ — коэффициент, показывающий, на сколько рублей надо вывезти материалов, чтобы купить на мировом рынке инвестиционных товаров на один рубль (при нагрузке γ);

$\beta_2 = \frac{q_1}{q_2}\gamma$ — коэффициент, показывающий, на сколько рублей можно приобрести на мировом рынке предметов потребления (при нагрузке γ) на один рубль покупки инвестиционных товаров.

Исследуем выражение **(6.2.17)** для оптимального удельного ввоза инвестиционных товаров. Прежде всего, обратим внимание на разность

$$\beta_2 - \frac{\beta_0}{a_2},$$

которая имеет следующий содержательный смысл:

- уменьшаемое β_2 — ввоз предметов потребления в рублях на один рубль ввоза инвестиционных товаров;
- вычитаемое $\frac{\beta_0}{a_2}$ — недополучение предметов потребления на один рубль ввоза инвестиционных товаров, вызванное вывозом материалов в объеме β_0.

Для того чтобы торговля была целесообразна, эта разность должна быть неотрицательна! Поэтому знаменатель первого члена выражения **(6.2.17)** положителен.

Знак числителя первого члена определяется знаком выражения в фигурных скобках, последнее положительно при условии

$$\alpha_1\delta_1 > \alpha_0 + \alpha_2\varepsilon, \qquad \textbf{(6.2.18)}$$

т.е. технологический уровень α_1 и доля фондосоздающего сектора в расходе материалов δ_1 должны быть достаточно велики, что означает достаточно высокую степень развития собственного фондосоздающего производства.

Из выражения **(6.2.17)** также видно, что оптимальный уровень удельного ввоза инвестиционных товаров существует не только при высоком уровне собственного фондосоздающего производства, но и при сравнительно высоком развитии собственного производства предметов потребления, что определяется неравенством

$$\frac{x_2}{x_1} > \frac{(1-\alpha_1)\left[\left(\beta_2 - \frac{\beta_0}{a_2}\right)\delta_2 + \beta_2\varepsilon\right]}{\alpha_1\delta_1 - (\alpha_0 + \alpha_2\varepsilon)}.$$

В противном случае оптимального значения y_1^* не существует и естественным ограничителем для роста объемов торговли являются технологические возможности материального сектора.

Оптимального значения нагрузки γ не существует.

В самом деле, при $c = x_2 + b_2\gamma y_1$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial \gamma} + b_2 y_1,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = -\frac{h(1-h)(1-lh)b_0 y_1}{h(\alpha - lh)(1-a_0)x_0 + (1-h)(1-lh)a_2 x_2} < 0,$$

поэтому

$$(D_0 = B_0(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0},$$

$$D_2 = B_2(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)^{\alpha_2})$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = b_0 y_1\left[-\frac{1}{1+\frac{(\alpha - lh)(1-a_0)D_0}{(1-h)^{1-\alpha_0}(1-lh)^{\alpha_0}a_2 D_2}} + \frac{a_2 b_2}{b_0}\right] > 0,$$

поскольку $a_2 b_2 > b_0$.

Следовательно, нагрузку, вообще говоря, целесообразно увеличивать. Однако существует верхний предел нагрузки, определяемый уравнением

$$h(\bar{\gamma}) = 0.$$

При этом уравнение материального баланса примет вид:

$$(1-a_0)D_0 = a_1 x_1 + (1+\overline{\gamma})b_0 y_1,$$

$$x_1 = B_1 \theta_1^{1-\alpha_1} s_1^{\alpha_1} (x_1 + y_1)^{\alpha_1}, \quad x_1 = x_1(\theta_1, s_1, y_1),$$

откуда

$$\overline{\gamma}(l, \theta_1, s_1, y_1) = \frac{(1-a_0)D_0 - a_1 x_1 - b_0 y_1}{b_0 y_1}.$$

Выводы

1. Если исходить из критерия максимизации стационарного удельного потребления при заданном технологическом укладе, то для стран с недостаточно развитой обрабатывающей промышленностью целесообразно вывозить столько сырья и материалов, насколько позволяют технологические возможности материального сектора. Однако по мере исчерпания сырьевых ресурсов в недалеком будущем перед этими странами все равно встанет проблема перехода к новому, более высокому технологическому укладу.

2. Напротив, для стран с достаточно развитой обрабатывающей промышленностью и сырьевой направленностью экономики существует критический уровень вывоза сырья и других материалов (в обмен на инвестиционные и потребительские товары), превышать который нецелесообразно. Чем больше развита обрабатывающая промышленность, тем ниже этот критический уровень.

3. Решающую роль в развитии экономики играет фондосоздающий сектор. При фиксированном уровне внешней торговли удельные выпуски всех секторов растут при увеличении вложений ресурсов в фондосоздающий сектор, вплоть до достижения критического уровня. В случае превышения критического уровня производство инвестиционных товаров будет по-прежнему возрастать, а производство потребительских товаров — сокращаться.

Вопросы и задания

1. В чем отличие открытой трехсекторной модели экономики от аналогичной замкнутой модели?
2. Каков характер переходных процессов в открытой трехсекторной модели экономики? Чем они отличаются от аналогичных процессов в замкнутой трехсекторной модели экономики?
3. В чем суть «золотого» правила распределения ресурсов в открытой трехсекторной модели экономики?
4. Как изменится открытая трехсекторная модель экономики при учете самодействия секторов?

7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНЕШНЕЙ ТОРГОВЛИ И НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

Настоящая глава посвящена исследованию влияния внешней торговли[1] и научно-технического прогресса на производство и потребление. В § 7.1–7.3 изменения объема и структуры внешней торговли рассматриваются с позиций единого критерия — максимизации удельного непроизводственного потребления. В § 7.4 такие изменения исследуются в условиях конкуренции секторов, § 7.5 посвящен моделированию научно-технического прогресса на макроуровне.

7.1. Условия возможности и целесообразности внешней торговли

Под ***возможностью*** внешней торговли понимается способность экономики предоставить эквивалентный объем топлива, электроэнергии, сырья и других материалов в мировых ценах в обмен на закупаемые за рубежом инвестиционные и потребительские товары.

Целесообразность торговли рассматривается в двух следующих формах: 1) как усиление индустриального развития при сохранении или увеличении удельного потребления; 2) как увеличение удельного потребления при сохранении или усилении индустриального развития.

Постановка вопроса об условиях возможности и целесообразности внешней торговли правомерна, если экономика находится в состоянии автаркии или вблизи него, т.е. в том случае, когда объемы внешней торговли невелики. Последнее с математической точки зрения означает, что можно линеаризовать нелинейные зависимости, отбрасывая квадратичные члены и члены более высокого порядка малости (относительно y_i, $i = 0, 1, 2$).

Поскольку y_0, y_2 входят в модель линейным образом, то необходимо линеаризовать только удельные выпуски секторов, которые зависят от y_1 нелинейно.

[1] Все результаты, приведенные в § 7.1—7.5, получены автором и опубликованы в книгах и статьях, указанных в библиографическом списке.

Казалось бы, возможны два варианта вхождения национальной экономики в мировой рынок:

1) без изменения сложившегося распределения ресурсов, т.е. только за счет регулирования составляющих внешней торговли;

2) с изменением сложившегося распределения ресурсов.

В первом случае (т.е. при постоянстве θ_i, s_i) находим, используя **(6.1.16)**, производные удельных выпусков секторов по y_1:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{\alpha_i x_i}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1}, \quad i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

поэтому при малых значениях y_1 удельные выпуски секторов примут следующий вид (нулевым верхним индексом отмечены удельные выпуски в состоянии автаркии):

$$x_1 = x_1^0 + \frac{\alpha_1 y_1}{1-\alpha_1}, \quad x_i = x_i^0 + \frac{\alpha_i x_i^0}{(1-\alpha_1)x_1^0}, \quad i = 0, 2.$$

Подставим последние выражения в уравнение материального баланса **(6.1.12)**:

$$(1-a_0)\left[x_0^0 + \frac{\alpha_0 x_0^0 y_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right] = a_1\left[x_1^0 + \frac{\alpha_1 y_1}{1-\alpha_1}\right] + a_2\left[x_2^0 + \frac{\alpha_2 x_2^0 y_1}{(1-\alpha_1)x_1^0}\right] + y_0.$$

Однако в состоянии автаркии

$$(1-a_0)x_0^0 = a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0,$$

поэтому

$$y_0 = \frac{y_1}{(1-\alpha_1)x_1^0}\left[\alpha_0(1-a_0)x_0^0 - \alpha_1 a_1 x_1^0 - \alpha_2 a_2 x_2^0\right]. \qquad \textbf{(7.1.2)}$$

Поскольку $\alpha_0 < \alpha_1$, $\alpha_0 < \alpha_2$, то выражение в квадратных скобках отрицательно, поэтому $y_0 < 0$. Иными словами, малый ввоз машин и оборудования в объеме y_1 не может быть компенсирован соответствующим вывозом материалов $y_0 > 0$ (ведь оказалось, что $y_0 < 0$!), следовательно, *первый случай невозможен.*

Таким образом, *вхождение сырьевой национальной экономики в мировой рынок усиливает ее сырьевую направленность,* поскольку требует перекачивания дополнительных ресурсов в материальный сектор.

Рассмотрим, в свою очередь, два крайних варианта такого перекачивания:

1) без изменения долей фондосоздающего сектора в ресурсах, т.е. целиком за счет потребительского сектора;

2) с использованием только фондосоздающего сектора в качестве донора.

Возможно и промежуточное решение, основанное на сочетании этих крайних вариантов в определенных пропорциях.

Вхождение в мировой рынок при фиксации долей ресурсов, поступающих в фондосоздающий сектор

В этом случае $\theta_1 = \text{const}$, $s_1 = \text{const}$, поэтому $d\theta_2 = -d\theta_0$, $ds_2 = -ds_0$. Примем $d\theta_0 = l\, ds_0$. Чтобы не загромождать формулы опустим значок автаркии, хотя он будет подразумеваться по умолчанию.

Имеем при $\theta_1 = \text{const}$, $s_1 = \text{const}$, $d\theta_0 = l ds_0$:

$$\left.\begin{aligned}
dx_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial x_0}{\partial s_0} ds_0 + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 = \\
&= x_0 \left[\left(\frac{l(1-\alpha_0)}{\theta_0} + \frac{\alpha_0}{s_0} \right) ds_0 + \frac{\alpha_0 dy_1}{(1-\alpha_1)\alpha_1} \right], \\
dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 = \frac{\alpha_1 x_1}{(1-\alpha_1) x_1} dy_1, \\
dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial x_2}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 = \\
&= x_2 \left[-\left(\frac{l(1-\alpha_2)}{\theta_2} + \frac{\alpha_2}{s_2} \right) ds_0 + \frac{\alpha_2 dy_1}{(1-\alpha_1) x_1} \right].
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(7.1.3)}$$

Подставим выражения **(7.1.3)** в уравнение материального баланса в дифференциалах (дифференциал dy_0 заменен на $(1+\gamma)\frac{q_1}{q_0} dy_1$):

$$\left[b_0\, ds_0 + \frac{\alpha_0\, dy_1}{(1-\alpha_1) x_1} \right] (1-a_0) x_0 = \frac{\alpha_1 a_1 x_1\, dy_1}{(1-\alpha_1) x_1} +$$
$$+ \left[-b_2\, ds_0 + \frac{\alpha_2\, dy_1}{(1-\alpha_1) x_1} \right] a_2 x_2 + (1+\gamma) \frac{q_1}{q_0} dy_1, \quad \textbf{(7.1.4)}$$

где $b_0 = \left[\frac{l(1-\alpha_0)}{\theta_0} + \frac{\alpha_0}{s_0} \right]$, $b_2 = \left[\frac{l(1-\alpha_2)}{\theta_2} + \frac{\alpha_2}{s_2} \right]$.

Как видим, по сравнению с **(7.1.2)** в коэффициенте при $(1-a_0)x_0$ в приходной части баланса появился положительный дополнительный член ($b_0\, ds_0$), а в коэффициенте при $a_2 x_2$ в расходной части баланса — отрицательный дополнительный член ($-b_2\, ds_0$), что в конечном счете и обеспечивает выполнение баланса.

Из **(7.1.4)** находим объем перелива инвестиционных ресурсов в материальный сектор ds_0 (объем перелива трудовых ресурсов равен $l\, ds_0$):

$$ds_0 = \frac{(1+\gamma)\dfrac{q_1}{q_0}(1-\alpha_1)x_1 - \left[\alpha_0(1-a_0)x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - \alpha_2 a_2 x_2\right]}{b_0(1-a_0)x_0 + b_2 a_2 x_2} \times$$
$$\times \frac{dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}. \qquad \textbf{(7.1.5)}$$

Поскольку, как было показано выше, выражение в квадратных скобках отрицательно, то и числитель, и знаменатель дроби в правой части **(7.1.5)** положительны, а поэтому $ds_0 > 0$.

Таким образом, условием *возможности* торговли, состоящей во ввозе инвестиционных и потребительских товаров в обмен на вывоз материалов, является увеличение потока ресурсов в материальный сектор (по первому варианту — за счет потребительского сектора и согласно формуле **(7.1.5)**).

Такая торговля будет *целесообразной*, если при этом увеличится удельное потребление, т.е.

$$dx_2 + dy_2 \geq 0.$$

Используя формулы **(7.1.3)**, **(7.1.5)**, вначале найдем изменение удельного выпуска потребительских товаров dx_2, вызванное удельным ввозом инвестиционных товаров в объеме dy_1 (с нагрузкой γ):

$$dx_2 = \frac{x_2\, dy_1 \left\{-b_0(1+\gamma)\dfrac{q_1}{q_0}(1-\alpha_1)x_1 + b_0(\alpha_0+\alpha_2)(1-a_0)x_0\right.}{(1-\alpha_1)x_1\left[b_0(1-a_0)x_0 + b_2 a_2 x_2\right]} -$$
$$- \frac{\left. b_0\alpha_1 x_1 + \alpha_2(b_2-b_0)a_2 x_2\right\}}{(1-\alpha_1)x_1\left[b_0(1-a_0)x_0 + b_2 a_2 x_2\right]}.$$

Добавив к последнему выражению прирост удельного ввоза предметов потребления $\gamma\dfrac{q_1}{q_2}dy_1$, получим общий прирост поступления потребительских товаров:

$$dx_2 + dy_2 = \frac{dy_1\left\{-b_0 x_2(1+\gamma)\dfrac{q_1}{q_0} + \left[b_0(1-a_0)x_0 + b_2 a_2 x_2\right]\gamma\dfrac{q_1}{q_2}\right\}}{b_0(1-a_0)x_0 + b_2 a_2 x_2} +$$
$$+ \frac{x_2 dy_1\left\{b_0(\alpha_0+\alpha_2)(1-a_0)x_0 - b_0\alpha_1 a_1 x_1 + \alpha_2(b_2-b_0)a_2 x_2\right\}}{(1-\alpha_1)x_1\left[b_0(1-a_0)x_0 + b_2 a_2 x_2\right]}. \qquad \textbf{(7.1.6)}$$

Поскольку $b_2 > b_0$, то для положительности второго слагаемого в правой части **(7.1.6)** достаточно, чтобы $\alpha_0 + \alpha_2 > \alpha_1$.

Первое слагаемое при $\gamma = 0$ отрицательно, поэтому оно может быть положительным только тогда, когда коэффициент при γ, равный

$$b_0 \frac{q_0 q_2}{q_1}\left(-q_2 x_2 + q_0(1-a_0)x_0 + q_0 \frac{b_2}{b_0} a_2 x_2\right), \qquad \textbf{(7.1.7)}$$

положителен. Из **(7.1.7)** видно, что этот коэффициент положителен при выполнении условия

$$q_0(1-a_0)x_0 \geq q_2 x_2. \qquad \textbf{(7.1.8)}$$

Таким образом, достаточными условиями целесообразности внешней торговли (при сделанных выше предложениях) являются:

1) сравнительно высокий уровень развития материального и потребительского секторов, а именно такой, что сумма коэффициентов эластичности данных секторов по фондам не меньше коэффициента эластичности фондосоздающего сектора;

2) стоимость товарной продукции материального сектора в мировых ценах не меньше стоимости продукции потребительского сектора в этих же ценах.

При сделанных предположениях фондосоздающий сектор получит дальнейшее развитие за счет дополнительных инвестиционных ресурсов в объеме $(s_1\, dy_1)$.

Вхождение в мировой рынок при фиксации долей ресурсов, поступающих в потребительский сектор

Пусть теперь $\theta_2 = \text{const}$, $s_2 = \text{const}$, поэтому

$$d\theta_0 = d\theta_1, \quad ds_0 = -ds_1.$$

Имеем согласно **(6.1.16)**:

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1}\right|_{y_1=0} = \frac{x_1}{\theta_1}, \quad \left.\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right|_{y_1=0} = \frac{\alpha_1 x_1}{(1-\alpha_1)s_1}, \quad \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right|_{y_1=0} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1},$$

$$\left.\frac{\partial x_0}{\partial \theta_0}\right|_{y_1=0} = x_0\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0} - \frac{\alpha_0}{\theta_1}\right),$$

$$\left.\frac{\partial x_0}{\partial s_0}\right|_{y_1=0} = x_0\left(\frac{\alpha_0}{s_0} - \frac{\alpha_0 \alpha_1}{1-\alpha_1}\right), \quad \left.\frac{\partial x_0}{\partial y_1}\right|_{y_1=0} = \frac{\alpha_0 x_0}{(1-\alpha_1)x_1},$$

$$\left.\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right|_{y_1=0} = \frac{\alpha_2 x_2}{(1-\alpha_1)x_1}.$$

Поэтому при $d\theta_0 = l\,d\theta_0$

$$\left.\begin{aligned} dx_0 &= x_0\left[b_0\,ds_0 + \frac{\alpha_0\,dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right],\\ dx_1 &= x_1\left[-b_1 ds_0 + \frac{\alpha_1\,dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right],\\ dx_2 &= x_2\cdot\frac{\alpha_2\,dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}, \end{aligned}\right\} \tag{7.1.9}$$

где (отметим, что эти обозначения отличаются от обозначений первого варианта):

$$b_0 = l\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0} - \frac{\alpha_0}{\theta_1}\right) + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\left(\frac{1-\alpha_1}{s_0} - \frac{\alpha_1}{s_1}\right),$$

$$b_1 = \frac{l}{\theta_1} + \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)s_1}.$$

Подставив дифференциалы удельных выпусков в уравнение материального баланса в дифференциалах, получим:

$$\left[b_0\,ds_0 + \frac{\alpha_0\,dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right](1-a_0)x_0 = \left[-b_1\,ds_0 + \frac{\alpha_1\,dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right]a_1x_1 +$$

$$+\frac{\alpha_2\,dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}a_2x_2 + (1+\gamma)\frac{q_1}{q_0}dy_1. \tag{7.1.10}$$

Из **(7.1.10)** находим объем перелива инвестиционных ресурсов в материальный сектор (объем перелива трудовых ресурсов равен $(l\,ds_0)$):

$$ds_0 = \frac{(1+\gamma)\dfrac{q_1}{q_0}(1-\alpha_1)x_1 - \left[\alpha_0(1-a_0)x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - \alpha_2 a_2 x_2\right]}{b_0(1-a_0)x_0 + b_1 a_1 x_1}\times$$

$$\times\frac{dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}. \tag{7.1.11}$$

Поскольку числитель первого сомножителя в правой части **(7.1.11)** положителен, то для обеспечения $ds_0 > 0$ необходимо выполнение условия

$$b_0(1-a_0)x_0 + b_1 a_1 x_1 > 0. \tag{7.1.12}$$

Поскольку $b_1 > 0$, то для выполнения **(7.1.12)** необходимо

$$\delta_1 > -\frac{b_0}{b_1}. \tag{7.1.13}$$

Напомним, что $\delta_1 = \dfrac{a_1 x_1}{(1-a_0)x_0}$ — доля фондосоздающего сектора в расходе товарной части производства материалов.

Но $-\dfrac{b_0}{b_1} \ge \alpha_0$, поэтому *достаточным условием возможности торговли является сравнительно высокое развитие фондосоздающего сектора*, при котором

$$\delta_1 \ge \alpha_0 . \tag{7.1.14}$$

В рассматриваемой ситуации поступление предметов потребления на потребительский рынок возрастает на величину

$$\gamma \frac{q_1}{q_2} dy_1 + \frac{\alpha_2 x_2\, dy_1}{(1-\alpha_1)x_1}. \tag{7.1.15}$$

В **(7.1.15)** первое слагаемое — прирост импорта, второе — прирост собственного производства за счет увеличения поступления импортных инвестиционных товаров.

Как при этом изменится собственное производство инвестиционных товаров? Чтобы выяснить это, подставим ds_0 согласно **(7.1.11)** в dx_1:

$$dx_1 = \frac{b_1\, dy_1 \left[-(1+\gamma)\dfrac{q_1}{q_0}(1-\alpha_1)x_1 + \left(\alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{b_0}{b_1}\right)(1-a_0)x_0 - \alpha_2 a_2 x_2 \right]}{(1-\alpha_1)\left[b_0(1-a_0)x_0 + b_1 a_1 x_1\right]}. \tag{7.1.16}$$

Хотя коэффициент при $(1-a_0)x_0$ положителен, однако в целом выражение в квадратных скобках отрицательно, поэтому $dx_1 < 0$, т.е. собственное производство инвестиционных товаров сократится.

Рассмотрим, наконец, приращение предложения инвестиционных товаров:

$$dx_1 + dy_1 = \frac{dy_1 \left\{ (1-\alpha_1)x_1 \left[-(1+\gamma)\dfrac{q_1}{q_0} + a_1 \right] \right.}{(1-\alpha_1)\left[\dfrac{b_0}{b_1}(1-a_0)x_0 + a_1 x_1\right]} +$$

$$+ \frac{\left. \left(\alpha_0 + \dfrac{b_0}{b_1}\right)(1-a_0)x_0 - \alpha_2 a_2 x_2 \right\}}{(1-\alpha_1)\left[\dfrac{b_0}{b_1}(1-a_0)x_0 + a_1 x_1\right]}. \tag{7.1.17}$$

Таким образом, для *целесообразности* торговли по второму варианту достаточно выполнение следующих условий:

1) $a_1 q_0 \geq (1+\gamma) q_1$ — стоимость продажи материалов, необходимых для производства единицы инвестиционных товаров, не меньше затрат на приобретение такой единицы с нагрузкой γ;

2) $\dfrac{\alpha_0 + b_0/b_1}{\alpha_2} > \delta_2$.

Как видим, последние два условия жесткие, особенно второе условие, согласно которому доли трудовых и инвестиционных ресурсов (θ_1, s_1), направляемых в фондосоздающий сектор, должны быть гораздо выше, чем наблюдаемые в реальной экономике. Поэтому более приемлемым следует признать первый вариант.

7.2. Детерминанты внешней торговли

Ни у кого не вызывает сомнения, что различия стран по природно-экономическим условиям порождают необходимость в международном разделении труда, обмена товарами, услугами и научно-техническими достижениями. Но на практике открытого мирового рынка нет: действуют квоты, запреты, дискриминация в мировой торговле (например, непредоставление стране режима наибольшего благоприятствования). Поэтому каждая суверенная страна должна определить для себя возможность и целесообразность приспособления к той нише в мировом рынке, которую последний готов ей предоставить.

Исследование сформулированной проблемы проведем в рамках открытой трехсекторной модели экономики, которая была рассмотрена в гл. 6. Здесь же напомним только названия и назначения секторов: материальный (нулевой) сектор производит предметы труда (топливо, электроэнергию, сырье, полуфабрикаты и т.п.); фондосоздающий (первый) сектор — средства труда (машины, оборудование, производственные здания, сооружения и т.п.); потребительский (второй) сектор — предметы потребления.

Напомним также предположения, положенные в основу открытой трехсекторной модели экономики (см. § 6.1):

1) технологический уклад считается заданным с помощью линейно-однородных производственных функций секторов:

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

где X_i, K_i, L_i — выпуск, основные производственные фонды (ОПФ) и число занятых в i-м секторе;

2) лаг капиталовложений отсутствует;

3) время изменяется непрерывно;

4) число занятых изменяется с постоянным темпом прироста v;

5) коэффициенты износа ОПФ секторов μ_0, μ_1, μ_2, коэффициенты прямых материальных затрат a_0, a_1, a_2, цены мирового рынка на продукцию секторов q_1, q_2, q_3 приближенно постоянны;

6) технологические уровни импортируемой и отечественной продукции примерно одинаковы;

7) экономика имеет сырьевую направленность, т.е. вывозится сырье в объеме Y_0, ввозятся инвестиционные товары Y_1, предметы потребления могут как ввозиться ($Y_2 > 0$), так и вывозиться ($Y_2 < 0$).

Исследование будем проводить в стационарном состоянии (что означает неизменность во времени фондовооруженности и производительности секторов) и в предположении, что производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа:

$$F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \qquad \textbf{(7.2.1)}$$

где A_i — коэффициент нейтрального технического прогресса;

α_i — коэффициент эластичности по фондам.

Тогда согласно § 6.1 народно-хозяйственная производительность секторов (т.е. выпуск продукции в расчете на одного занятого в народном хозяйстве) имеет вид:

$$x_i = \frac{X_i}{L} = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i} = \theta_i A_i \left[\frac{s_i}{\lambda_i \theta_i}\left(x_1 + y_1\right)\right]^{\alpha_i} = \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

$$= B_i \theta_i^{1-\alpha_i} s_i^{\alpha_i} \left(x_1 + y_1\right)^{\alpha_i}, \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ — доля i-го сектора в распределении труда;

$s_i = \dfrac{I_i}{X_1 + Y_1}$ — доля i-го сектора в распределении инвестиционных товаров;

$k_i = \dfrac{K_i}{L_i} = \dfrac{s_i}{\lambda_i \theta_i}\left(x_1 + y_1\right)$ — стационарная фондовооруженность i-го сектора;

$y_1 = \dfrac{Y_i}{L}$ — ввоз-вывоз инвестиционных товаров в расчете на одного занятого в народном хозяйстве;

$\lambda_i = \mu_i + \nu$ — коэффициент, характеризующий сокращение фондовооруженности i-го сектора за счет износа и роста числа занятых;

$B_i = \dfrac{A_i}{\lambda_i^{\alpha_i}}$ — скорректированный (на износ и рост числа занятых) коэффициент нейтрального технического прогресса.

Будем теперь полагать, что уровень внешней торговли, представленный удельными значениями ввоза-вывоза $y = (y_0, y_1, y_2)$, $y_i = \dfrac{Y_i}{L}$ $(q_0 y_0 = q_1 y_1 + q_2 y_2)$ постоянен. Тогда согласно § 6.1 модель открытой трехсекторной экономики в относительных показателях и стационарном состоянии будет представлена тремя балансами:

- трудовым —

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1; \tag{7.2.3}$$

- инвестиционным —

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1; \tag{7.2.4}$$

- материальным —

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + y_0. \tag{7.2.5}$$

При этом $x_i = x_i(\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$, $i = 0, 1, 2$, определяется выражениями **(7.2.2)**.

В модели **(7.2.3)—(7.2.5)** шесть переменных $\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2$, связанных тремя соотношениями, поэтому остается три степени свободы.

Равновесие при фиксации поступления ресурсов в потребительский сектор

Вначале зафиксируем (θ_2, s_2), допуская, таким образом, перераспределение ресурсов только между материальным и фондосоздающим секторами, поэтому остается одна степень свободы. Кроме того, рассмотрим наиболее важный с практической точки зрения случай, когда оба ресурса распределяются между материальным и фондосоздающим секторами в одинаковых пропорциях (этим снимается последняя степень свободы):

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0 = (1-h)(1-\theta_2),\ \theta_1 = h(1-\theta_2),\ \theta_2, \\ &s_0 = (1-h)(1-s_2),\ s_1 = h(1-s_2),\quad s_2, \end{aligned}\right\} \tag{7.2.6}$$

где h — доля фондосоздающего сектора в распределении труда и инвестиций между материальным и фондосоздающим секторами.

Структурные переменные θ, s, заданные соотношениями **(7.2.6)**, при любом $0 \le h \le 1$ удовлетворяют трудовому и инвестиционному балансам. Покажем теперь, что при определенном значении h удельные выпуски $x_0(h)$, $x_1(h)$, $x_2(h)$ удовлетворяют материальному балансу.

Прежде всего, подставив **(7.2.6)** в **(7.2.2)**, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_0(h) &= B_0\left(1-h\right)\left(1-\theta_2\right)^{1-\alpha_0}\left(1-s_2\right)^{\alpha_0}\left(x_1\left(h\right)+y_1\right)^{\alpha_0},\\ x_1(h) &= B_1 h\left(1-\theta_2\right)^{1-\alpha_1}\left(1-s_2\right)^{\alpha_1}\left(x_1\left(h\right)+y_1\right)^{\alpha_1},\\ x_2(h) &= B_2 h\theta_2^{1-\alpha_2} s_2^{\alpha_2}\left(x_1\left(h\right)+y_1\right)^{\alpha_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.2.7)}$$

Найдем производные удельных выпусков по h:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial h} &= \frac{x_0\left[\alpha_0 - h\left(1-\alpha_1+\alpha_0+y_1/x_1\right)\right]}{h\left(1-h\right)\left(1-\alpha_1+y_1/x_1\right)},\\ \frac{\partial x_1}{\partial h} &= \frac{x_1+y_1}{h\left(1-\alpha_1+y_1/x_1\right)},\\ \frac{\partial x_2}{\partial h} &= \frac{\alpha_2 x_2}{h\left(1-\alpha_1+y_1/x_1\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.2.8)}$$

Видим, что с ростом h, т.е. с ростом доли фондосоздающего сектора в ресурсах, удельные выпуски фондосоздающего и потребительского секторов *растут*, а вот поведение материального сектора несколько сложнее.

Из **(7.2.8)** следует, что знак производной $\dfrac{\partial x_0}{\partial h}$ определяется знаком выражения

$$\alpha_0 - h\left(1-\alpha_1+\alpha_0+y_1/x_1\right).$$

При $h = 0$, т.е. при отсутствии собственного фондосоздающего производства, данное выражение имеет вид:

$$\alpha_0 - y_1/x_1'\left(0\right), \qquad \textbf{(7.2.9)}$$

где

$$x_1'\left(0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{x_1\left(h\right)}{h} = B_1\left(1-\theta_2\right)^{1-\alpha_1}\left(1-s_2\right)^{\alpha_1} y_1^{\alpha_1} \qquad \textbf{(7.2.10)}$$

— потенциальный удельный выпуск фондосоздающего сектора только за счет ввоза инвестиционных товаров.

Если

$$y_1 / x_1'(0) \leq \alpha_0, \tag{7.2.11}$$

то с ростом h, начиная с $h = 0$, удельный выпуск материалов сначала *растет*, затем достигает *максимума* в точке

$$h^* = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1 - \alpha_1 + y_1 / x_1'\left(h^*\right)}, \tag{7.2.12}$$

после чего убывает. Условие **(7.2.11)** означает, что создание собственного фондосоздающего производства приводит к увеличению выпуска материалов.

Общая картина изменения левой $\left(g_0(h) = (1 - a_0) x_0(h)\right)$ и правой $\left(g_1(h) = a_1 x_1(h) + a_2 x_2(h) + y_0\right)$ частей уравнения материального баланса при выполнении условия **(7.2.11)** показана на рис. 7.1.

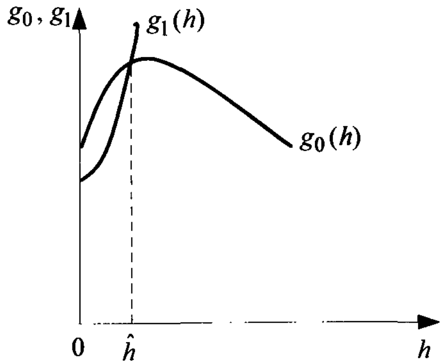

Рис. 7.1. Графическое решение уравнения материального баланса

Условие

$$(1 - a_0) x_0(0) > a_2 x_2(0) + y_0,$$

или

$$(1 - a_0) B_0 (1 - \theta_2)^{1-\alpha_0} (1 - s_2)^{\alpha_0} y_1^{\alpha_0} > a_2 B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} s_2^{\alpha_2} y_1^{\alpha_2} + y_0, \tag{7.2.13}$$

означающее, что при отсутствии собственного фондосоздающего производства можно за счет импорта средств труда в объеме y_1 обеспечить материалами производство предметов потребления в объеме $a_2 B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} s_2^{\alpha_2} y_1^{\alpha_2}$ и экспорт в объеме y_0, гарантирует существование единственного решения $\hat{h}$ уравнения материального баланса **(7.2.5)**:

$$\left.\begin{aligned}&(1-a_0)B_0\left(1-\hat{h}\right)(1-\theta_2)^{1-\alpha_0}(1-s_2)^{\alpha_0}(x(\hat{h})+y_1)^{\alpha_0}=\\&=a_1B_1\hat{h}(1-\theta_2)^{1-\alpha_1}(1-s_2)^{\alpha_1}(x(\hat{h})+y_1)^{\alpha_1}+\\&+a_2B_2\theta_2^{1-\alpha_2}s_2^{\alpha_2}(x(\hat{h})+y_1)^{\alpha_2}+y_0.\end{aligned}\right\}\qquad(7.2.14)$$

Оптимизация удельного выпуска предметов потребления[1]

Выше было найдено такое распределение ресурсов между материальным и фондсоздающим секторами, которое при фиксированном поступлении ресурсов в потребительский сектор (θ_2, s_2 фиксированы) обеспечивает выполнение трудового, инвестиционного и материального балансов. Это распределение задается соотношениями **(7.2.6)**, в которых $h=\hat{h}$, где $\hat{h}$ — решение уравнения материального баланса в форме **(7.2.14)**.

Теперь будем менять θ_2, s_2 таким образом, чтобы максимизировать удельный выпуск предметов потребления при выполнении всех балансов **(7.2.3)—(7.2.5)** и условий **(7.2.11)**, **(7.2.13)**. Исследуем наиболее простой частный случай, когда ресурсы распределяются в потребительский сектор в равных пропорциях, т.е. $\theta_2 = s_2$.

Прежде всего рассмотрим относительно свободное изменение удельного выпуска предметов потребления, т.е. без выполнения материального баланса, но при выполнении трудового и инвестиционного балансов, при фиксированном h и $\theta_2 = s_2$. В этом случае соотношения **(7.2.7)** примут вид:

$$\left.\begin{aligned}&x_0(h,s_2)=B_0(1-h)(1-s_2)\left[x_1(h,s_2)+y_1\right]^{\alpha_0},\\&x_1(h,s_2)=B_1h(1-s_2)\left[x_1(h,s_2)+y_1\right]^{\alpha_1},\\&x_2(h,s_2)=B_2s_2\left[x_1(h,s_2)+y_1\right]^{\alpha_2}.\end{aligned}\right\}\qquad(7.2.15)$$

При этом производные этих удельных выпусков по h по-прежнему будут иметь форму **(7.2.8)**.

[1] Отличие данной постановки задачи на максимум удельного выпуска предметов потребления от задачи на определение глобального максимума удельного потребления, исследованной в § 6.2, состоит в фиксации удельных параметров внешней торговли (y_0, y_1, y_2).

Найдем теперь их производные по s_2:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial s_2}&=\frac{x_0\left(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_0\right)}{\left(1-s_2\right)\left(1-\alpha_1+y_1/x_1\right)},\\ \frac{\partial x_1}{\partial s_2}&=\frac{x_1+y_1}{\left(1-s_2\right)\left(1-\alpha_1+y_1/x_1\right)},\\ \frac{\partial x_2}{\partial s_2}&=\frac{x_2\left[1-\alpha_1+y_1/x_1-\left(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_2\right)s_2\right]}{s_2\left(1-s_2\right)\left(1-\alpha_1+y_1/x_1\right)}.\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(7.2.16)}$$

Как видно из **(7.2.16)**, с ростом s_2 (при фиксированном h!) удельные выпуски материального и фондосоздающего секторов падают, а удельный выпуск потребительского сектора вначале *растет*, потом достигает *максимума* в точке

$$s_2^*=\frac{1-\alpha_1+y_1/x_1}{1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_2},\qquad \textbf{(7.2.17)}$$

после чего *падает*.

Именно в наличии технологических (локальных) максимумов проявляется сходство материального и потребительского секторов (максимум удельного выпуска материального сектора достигается в точке h^*, определяемой выражением **(7.2.12)**, а потребительского — в точке s_2^*, определяемой выражением **(7.2.17)**), в то время как удельный выпуск фондосоздающего сектора неуклонно увеличивается с ростом ресурсов, т.е. у фондосоздающего сектора нет технологического максимума.

Теперь перейдем к полномасштабной записи сформулированной задачи (h удовлетворяет уравнению материального баланса, но значок «$\wedge$» опущен).

Найти максимум удельного потребления

$$\max_{s_2} B_2 s_2\left[x_1\left(s_2\right)+y_1\right]^{\alpha_2},\qquad \textbf{(7.2.18)}$$

где $x_1\left(s_2\right)=x_1(h(s_2),s_2)$, $x_1(h,s_2)$ — решение уравнения

$$x_1\left(h,s_2\right)=B_1 h\left(1-s_2\right)\left[x_1\left(h,s_2\right)+y_1\right]^{\alpha_1},\qquad \textbf{(7.2.19)}$$

$h=h\left(s_2\right)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned}&\left(1-a_0\right)B_0\left(1-h\right)\left(1-s_2\right)\left[x_1\left(h,s_2\right)+y_1\right]^{\alpha_0}=\\ &=a_1x_1\left(h,s_2\right)+a_2B_2s_2\left[x_1\left(h,s_2\right)+y_1\right]^{\alpha_1}+y_0,\end{aligned}\qquad \textbf{(7.2.20)}$$

при выполнении условий

$$\alpha_0 B_1 \left(1-s_2\right) y_1^{\alpha_1} \ge y_1, \qquad \textbf{(7.2.21)}$$

$$\left(1-a_0\right) B_0 \left(1-s_2\right) y_1^{\alpha_0} \ge a_2 B_2 s_2 y_1^{\alpha_2} + y_0. \qquad \textbf{(7.2.22)}$$

В этой нелинейной задаче на максимум по переменной s_2 уравнение **(7.2.20)** задает материальный баланс, соотношение **(7.2.21)** — условие целесообразности организации собственного фондосоздающего производства, соотношение **(7.2.22)** — условие, обеспечивающее возможность удельного экспорта материалов в объеме y_0.

Эту полномасштабную задачу будем решать в два этапа, на первом из которых не будем принимать во внимание условия **(7.2.21)**, **(7.2.22)**. Таким образом, на первом этапе $x_2\left(h, s_2\right)$ имеет только одну степень свободы, поскольку при каждом s_2 по уравнению материального баланса **(7.2.20)** определяется единственное значение $h = h\left(s_2\right)$, и, следовательно, $x_2\left(h\left(s_2\right), s_2\right) = x_2\left(s_2\right)$.

Если уравнение материального баланса имеет при заданном s_2 решение $h = h\left(s_2\right)$, то рассмотрим, на какую величину dh изменится это решение при изменении s_2 на ds_2. Уравнение **(7.2.20)** в дифференциалах имеет вид (y_0 фиксировано!):

$$\left(1-a_0\right) dx_0 = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2, \qquad \textbf{(7.2.23)}$$

где $dx_1 = \dfrac{\partial x_i}{\partial h} dh + \dfrac{\partial x_i}{\partial s_2} ds_2, \quad i = 0, 1, 2.$

Подставив в **(7.2.23)** выражения для производных удельных выпусков **(7.2.8)**, **(7.2.16)**, получим следующее соотношение между dh и ds_2:

$$\frac{dh}{h\left(1-h\right)} \Big\{ \left(1-a_0\right) x_0 \left[\alpha_0 - h\left(1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0\right)\right] -$$

$$- a_1 \left(x_1 + y_1\right)\left(1-h\right) - a_2 x_2 \alpha_2 \left(1-h\right) \Big\} =$$

$$= \frac{ds}{s_2\left(1-s_2\right)} \Big\{ -\left(1-a_0\right) x_0 \left(1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0\right) s_2 - a_1\left(x_1 + y_1\right) s_2 +$$

$$+ a_2 x_2 \left[1-\alpha_1 + y_1/x_1 - (1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_2) s_2\right] \Big\}.$$

Отсюда

$$\frac{dh}{ds_2} = \frac{h\left(1-h\right) A_s}{s_2\left(1-s_2\right) A_h}, \qquad \textbf{(7.2.24)}$$

где

$$A_s = (1-a_0)x_0(1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0)s_2 - a_1(x_1+y_1)s_2 +$$
$$+ a_2x_2\left[1-\alpha_1 + y_1/x_1 - (1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_2)s_2\right],$$
$$A_h = (1-a_0)x_0\left[\alpha_0 - (1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0)h\right] -$$
$$- a_1(x_1+y_1)(1-h) - a_2x_2\alpha_2(1-h).$$

Знак производной $\dfrac{dh}{ds_2}$ определяется знаками A_h, A_s. Представим A_h в следующем виде:

$$A_h = -(1-\alpha_1 + y_1/x_1)(1-a_0)x_0 +$$
$$+(1-h)\left[\alpha_0(1-a_0)x_0 - a_1(x_1+y_1) - \alpha_2a_2x_2\right], \qquad \textbf{(7.2.25)}$$

откуда следует, что наверняка $A_h < 0$ при выполнении условия

$$\alpha_0(1-a_0)x_0 - a_1(x_1+y_1) - \alpha_2a_2x_2 < 0. \qquad \textbf{(7.2.26)}$$

Напомним, что x_0, x_1, x_2 связаны уравнением материального баланса

$$(1-a_0)x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 = y_0,$$

поэтому при относительно небольших значениях y_0 и $\alpha_0 < \alpha_2$ условие **(7.2.26)** наверняка выполняется.

Представим A_s в следующем виде:

$$A_s = (1-\alpha_1 + y_1/x_1)a_2x_2 + s_2\left[(1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0)(1-a_0)x_0 -\right.$$
$$\left. - a_1(x_1+y_1) - (1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_2)a_2x_2\right]. \qquad \textbf{(7.2.27)}$$

Из **(7.2.27)** видно, что наверняка $A_s > 0$ при выполнении условия

$$(1-a_0)x_0 - a_1x_1\frac{1+y_1/x_1}{1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0} - a_2x_2\frac{1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_2}{1-\alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0} > 0. \qquad \textbf{(7.2.28)}$$

Таким образом, при выполнении условий **(7.2.26)**, **(7.2.28)** $\dfrac{dh}{ds_2} < 0$, т.е. с ростом s_2 доля фондосоздающего сектора в расходе ресурсов, выделенных материальному и фондосоздающему секторам, *сокращается.*

Теперь можно исследовать изменение удельного выпуска потребительского сектора при выполнении уравнения материального баланса. Имеем:

$$\frac{dx_2}{ds_2}=\frac{\partial x_2}{\partial s_2}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{dh}{ds_2}=$$

$$=\frac{x_2\left\{\alpha_2(1-h)A_s+\left[1-\alpha_1+y_1/x_1-(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_2)s_2\right]\right\}}{s_2(1-s_2)(1-\alpha_1+y_1/x_1)A_h}=$$

$$=\frac{-a_1(x_1+y_1)(1-h)+(1-a_0)x_0\left[\alpha_0-h(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_0)\right]}{s_2(1-s_2)A_h}+$$

$$+\frac{s_2\left[a_1(x_1+y_1)(1-h)+(1-a_0)x_0\left(\alpha_2-\alpha_0+h(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_0)\right)\right]}{s_2(1-s_2)A_h}.$$

Поскольку при $s_2 = 0$ условие **(7.2.26)** имеет вид:

$$\alpha_0(1-a_0)x_0(0)-a_1\left[x_1(0)+y_1\right]<0,$$

то

$$-a_1\left[x_1(0)+y_1\right]\left[1-h(0)\right]+$$
$$+(1-a_0)x_0(0)\left[\alpha_0-h(0)\left(1-\alpha_1+y_1/x_1(0)+\alpha_0\right)\right]=$$
$$=\left[1-h(0)\right]\left[\alpha_0(1-a_0)x_0(0)-a_1\left(x_1(0)+y_1\right)\right]-$$
$$-h(0)\left[1-\alpha_1+y_1/x_1(0)\right]<0.$$

Вместе с $A_h < 0$ это дает

$$\left.\frac{dx_2}{ds_2}\right|_{s_2=0}=+\infty,$$

т.е. с ростом s_2, начиная с $s_2 = 0$, $x(s_2)$ возрастает, достигая максимума в точке

$$s_2^{**}=\frac{a_1(x_1+y_1)(1-h)-(1-a_0)x_0\left[\alpha_0-h(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_0)\right]}{a_1(x_1+y_1)(1-h)+(1-a_0)x_0\left[\alpha_2-\alpha_0+h(1-\alpha_1+y_1/x_1+\alpha_0)\right]},\quad \textbf{(7.2.29)}$$

после чего убывает.

□ Докажем теперь, что при определенных условиях (в частности, при $h=h(s_2^{**})$), $s_2^{**}<s_2^{*}$, т.е. точка сбалансированного технологического оптимума лежит левее точки свободного (без соблюдения уравнения материального баланса) технологического оптимума.

Введем следующие обозначения:

$$h^{**}=h\left(s_2^{**}\right),\quad \hat{x}_2(s_2)=B_2s_2\left[x_1\left(h^{**},s_2\right)+y_1\right]^{\alpha_2},$$
$$x_2(s_2)=B_2s_2\left[x_1\left(h(s_2),s_2\right)+y_1\right]^{\alpha_2}.$$

Тогда для $s_2 < s_2^{**}$ $h(s_2) > h^{**}$, поэтому

$$x_2(s_2) = B_2 s_2 \left[x_1\left(h(s_2), s_2\right) + y_1\right]^{\alpha_2} >$$

$$> B_2 s_2 \left[x_1\left(h^{**}, s_2\right) + y_1\right]^{\alpha_2} = \hat{x}_2(s_2).$$

Напротив, при $s_2 > s_2^{**}$ $x_2(s_2) < \hat{x}_2(s_2)$.

Если бы $s_2^* < s_2^{**}$, то согласно приведенному доказательству $x_2\left(s_2^*\right) > \hat{x}_2\left(s_2^*\right)$. Однако $x_2\left(s_2^{**}\right) \geq x_2\left(s_2^*\right)$, поэтому $x_2\left(s_2^{**}\right) > \hat{x}_2\left(s_2^*\right)$, т.е. оказалось бы, что связанный оптимум больше свободного, что невозможно, следовательно, $s_2^{**} < s_2^*$. ■

Общая картина изменения удельного выпуска предметов потребления как функции доли s_2 показана на рис. 7.2, s_2^0 — корень уравнения $h(s_2) = 0$. Следует отметить, что всегда $s_2^{**} < s_2^0$, поскольку $h^{**} > 0$.

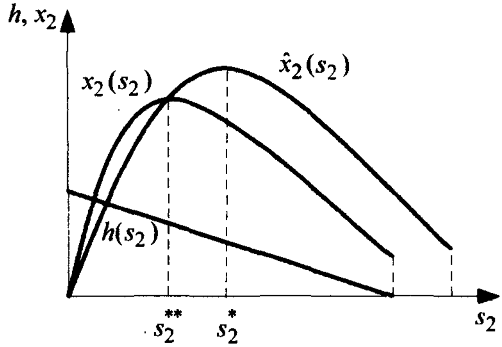

*Рис. 7.2. **Графики функций*** $x_2(s_2), \hat{x}(s_2), h(s_2)$

Как видим, наиболее целесообразно поддерживать долю потребительского сектора в расходе ресурсов на уровне, не превосходящем оптимального значения:

$$s_2 \leq s_2^{**}.$$

При этом $h \geq h^{**}$, т.е. доля фондосоздающего сектора в расходе остаточных ресурсов (после выделения доли s_2 потребительскому сектору) не может обратиться в нуль, поэтому условие **(7.2.22)** автоматически выполняется.

Условие **(7.2.21)** целесообразности организации и ведения собственного фондосоздающего производства

$$\alpha_0 \frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}}(1-s_2)\,y_1^{\alpha_1} \geq y_1$$

не может быть выполнено для любых s_2, но только для таких, которые удовлетворяют неравенству

$$s_2 \leq \bar{s}_2,$$

где[1] $\bar{s}_2 = \dfrac{\alpha_0 \dfrac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}} y_1^{\alpha_1} - y_1}{\alpha_0 \dfrac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}} y_1^{\alpha_1}}$.

Если $\bar{s}_2 \geq s_2^{**}$, то наиболее рациональное распределение ресурсов будет следующим:

$$s_0 = \left[1 - h\left(s_2^{**}\right)\right]\left(1 - s_2^{**}\right), \quad s_1 = h\left(s_2^{**}\right)\left(1 - s_2^{**}\right), \quad s_2 = s_2^{**}.$$

В противном случае распределение имеет вид (s_2^{**} недостижимо!)

$$s_0 = \left[1 - h(\bar{s}_2)\right](1 - \bar{s}_2), \quad s_1 = h(\bar{s}_2)(1 - \bar{s}_2), \quad s_2 = \bar{s}_2.$$

При этом удельный выпуск предметов потребления меньше, чем в первом случае.

Детерминанты внешней торговли

В заключение соберем воедино все детерминанты внешней торговли, выявленные в процессе проведенного исследования.

Под ***детерминантами*** понимаются соотношения между макропараметрами, имеющие содержательный экономический смысл.

Те или иные значения детерминант устанавливают возможность и целесообразность внешней торговли заданного уровня $y = (y_0, y_1, y_2)$. Напомним, что:

y_0 — удельный вывоз материалов (сырья) в расчете на одного занятого;

y_1 — удельный ввоз инвестиционных товаров (главным образом, машин и оборудования);

---

[1] Числитель выражения для $\bar{s}_2$ обязательно положителен, иначе бы **(7.2.21)** не выполнялось ни для одного из значений s_2.

y_2 — удельный ввоз ($y_2 > 0$) или удельный вывоз ($y_2 < 0$) предметов потребления.

Кроме показателей уровня внешней торговли, которые характеризуют национальную «нишу», предоставляемую мировым рынком, детерминантами также являются макропараметры, которые характеризуют технологические возможности секторов ($i = 0, 1, 2$):

A_i — коэффициент нейтрального технического прогресса;

α_i — коэффициент эластичности по фондам;

μ_i — коэффициент износа фондов;

$\lambda_i = \mu_i + \nu$ — коэффициент, который характеризует сокращение фондовооруженности за счет износа и роста числа занятых с постоянным темпом прироста ν;

a_i — коэффициент прямых материальных затрат.

Начнем с того, что почти все сложные детерминанты содержат в своем составе детерминанту, характеризующую соотношение объемов импорта и собственного производства инвестиционных товаров. Это традиционно применяемый показатель и *первая детерминанта*.

Условие *индустриальной безопасности* состоит в том, чтобы объем импорта средств труда не превосходил объема собственного производства:

$$D_1 = y_1/x_1 \leq 1. \qquad \textbf{(7.2.30)}$$

Другие детерминанты впервые получены в настоящем исследовании с помощью математических методов.

Положительное значение *второй детерминанты*

$$D_2 = \alpha_0 - y_1/x_1'(0) > 0,$$
$$x_1'(0) = \frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}}(1 - s_2)y_1^{\alpha_1} \qquad \textbf{(7.2.31)}$$

означает *целесообразность организации и ведения собственного фондосоздающего производства*: при $\alpha_0 - y_1/x_1'(0) < 0$ с началом выпуска инвестиционных товаров удельный выпуск материального сектора падает.

Условие *возможности внешней торговли*, характеризующейся экспортом материалов и импортом средств труда, состоит в положительности *третьей детерминанты*

$$D_3 = (1 - a_0)\frac{A_0}{\lambda_0^{\alpha_0}}(1 - s_2)y_1^{\alpha_0} - a_2\frac{A_2}{\lambda_2^{\alpha_2}}s_2 y_1^{\alpha_2} - y_0 > 0. \qquad \textbf{(7.2.32)}$$

Это означает, что в отсутствие фондосоздающего производства материальный сектор способен с лихвой обеспечить удельный экспорт в объеме y_0 и покрыть потребность потребительского сектора в материалах.

Положительное значение *четвертой детерминанты*

$$D_4 = (1 - a_0) x_0 (1 - \alpha_1 + y_1/x_1 + \alpha_0) - a_1 (x_1 + y_1) > 0 \qquad \textbf{(7.2.33)}$$

вместе с отрицательностью *пятой детерминанты*

$$D_5 = \alpha_0 (1 - a_0) x_0 - a_1 (x_1 + y_1) - \alpha_2 a_2 x_2 < 0 \qquad \textbf{(7.2.34)}$$

гарантирует *падение доли h фондосоздающего сектора в расходе ресурсов при росте доли s_2 потребительского сектора*, т.е. $\frac{dh}{ds_2} < 0$.

Отрицательное значение *шестой детерминанты*

$$D_6 = \alpha_0 (1 - a_0) x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - \alpha_2 a_2 x_2 < 0, \qquad \textbf{(7.2.35)}$$

как было показано в § 7.1, означает, что увеличение импорта инвестиционных товаров может быть компенсировано соответствующим увеличением выпуска материалов только при увеличении доли материального сектора в распределении ресурсов.

Если же шестая компонента неотрицательна

$$\alpha_0 (1 - a_0) x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - \alpha_2 a_2 x_2 \geq 0, \qquad \textbf{(7.2.36)}$$

то увеличение импорта средств труда может быть компенсировано соответствующим увеличением выпуска материалов без изменения структуры распределения ресурсов.

Наконец, положительное значение *седьмой детерминанты*

$$D_7 = x_2 \left(s_2^{**}\right) + y_2 - x_2^0 > 0 \qquad \textbf{(7.2.37)}$$

означает *целесообразность приспособления национальной экономики к заданному уровню внешней торговли* $y = (y_0, y_1, y_2)$, поскольку при этом максимальное удельное потребление

$$x_2 \left(s_2^{**}\right) + y_0$$

выше соответствующего показателя для состояния автаркии ($y = 0$):

$$x_2^0 = C_2 s_2^0 \left(1 - s_2^0\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \left(h^0\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}},$$

где $C_2 = \frac{A_2}{\lambda_2^{\alpha_2}} \left(\frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}$;

s_2^0 — решение уравнения

$$s_2^0 = \frac{a_1 x_1^0\left(s_2^0\right)\left(1-h^0\right)-\left(1-a_0\right)x_0^0\left(s_2^0\right)\left[\alpha_0-h^0\left(1-\alpha_1+\alpha_0\right)\right]}{a_1 x_1^0\left(s_2^0\right)\left(1-h^0\right)+\left(1-a_0\right)x_0^0\left(s_2^0\right)\left[\alpha_2-\alpha_0+h^0\left(1-\alpha_1+\alpha_0\right)\right]},$$

$$x_0\left(s_1\right)=x_0\left(h\left(s_2\right),s_2\right)=C_0\left(1-s_2\right)^{\frac{1-\alpha_1+\alpha_0}{1-\alpha_1}}\left(1-h\right)h^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}},$$

$$x_1\left(s_2\right)=x_1\left(h\left(s_2\right),s_2\right)=C_1\left(1-s_2\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}h^{\frac{1}{1-\alpha_1}},$$

h^0 — решение уравнения (при $s_2 = s_2^0$)

$$\left(1-a_0\right)x_1 C_0\left(1-h\right)h^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}\left(1-s_2\right)^{\frac{1-\alpha_1+\alpha_0}{1-\alpha_1}} =$$

$$= a_1 C_1 h^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\left(1-s_2\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + a_2 C_2 h^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} s_2\left(1-s_2\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}},$$

$$C_0 = \frac{A_0}{\lambda_0^{\alpha_0}}\left(\frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}, \quad C_1 = \left(\frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

7.3. Влияние внешней торговли на национальную экономику

Как меняется собственное производство средств производства и предметов потребления при переходе от одного сбалансированного состояния внешней торговли к другому? Эта проблема уже была исследована в § 7.1 для ситуации, когда национальная экономика находится в состоянии автаркии или состоянии, весьма близком к нему. Проанализируем ситуацию, когда национальная экономика уже интегрирована в мировой рынок. Для упрощения выкладок рассмотрим случай $\theta_1 = s_1$, хотя аналогичные результаты имеют место и при $\theta_1 \neq s_1$.

При $\theta_1 = s_1$ удельные выпуски секторов примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B_0(1-h)(1-s_1)(x_1+y_1)^{\alpha_0}, \\ x_1 &= B_1 s_1 (x_1+y_1)^{\alpha_1}, \\ x_2 &= B_2 h(1-s_1)(x_1+y_1)^{\alpha_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.3.1)}$$

Пусть удельный ввоз машин и оборудования увеличился на dy_1, тогда (при неизменном ввозе предметов потребления) удельный вывоз сырья и других материалов должен возрасти на некоторую величину dy_0, чтобы компенсировать увеличение ввоза, при этом согласно **(6.2.5)**

$$q_0\, dy_0 = q_1\, dy_1. \tag{7.3.2}$$

Если страна придерживается политики индустриальной безопасности, то увеличение выпуска материалов может быть достигнуто только за счет перекачивания ресурсов из потребительского сектора в материальный (т.е. $dh < 0$) при сохранении доли s_1 фондосоздающего сектора в распределении ресурсов (первый вариант). Если экономика достаточно индустриально развита, то рост выпуска материалов может быть достигнут и за счет сокращения доли s_1 фондосоздающего сектора в ресурсах, т.е. $ds_1 < 0$ (второй вариант). Возможна также комбинация двух приведенных вариантов структурной политики.

Материальный баланс в дифференциалах имеет следующий вид:

$$dy_0 = (1 - a_0)dx_0 - a_1\, dx_1 - a_2\, dx_2. \tag{7.3.3}$$

Перераспределение ресурсов между материальным и потребительским секторами

При первом варианте структурной политики (т.е. при $ds_1 = 0$) $x_i = (h, y_1)$, $i = 0, 2$, $x_1 = x_1(y_1)$ дифференциалы удельных выпусков секторов в **(7.3.3)** имеют вид:

$$dx_i = \frac{dx_i}{dy_1} \cdot dy_1, \quad i = 0, 1, 2.$$

По выражениям **(6.2.1)**, **(6.2.8)** находим производные удельных выпусков по удельному импорту машин и оборудования:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_0}{\partial y_1} = -\frac{x_0(\alpha - lh)}{(1-h)(1-lh)} \cdot \frac{dh}{dy_1} + \frac{\alpha_0 x_0}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1}, && (1)\\
&\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\alpha_1 x_1}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1}, && (2)\\
&\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{x_2}{h} \cdot \frac{dh}{dy_1} + \frac{\alpha_2 x_2}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1}, && (3)
\end{aligned}\right\} \tag{7.3.4}$$

где $\alpha = \alpha\,(l) = \alpha_0 + (1 - \alpha_0)l$, $l > 1$,

h — решение уравнения материального баланса

$$(1 - a_0)x_0(h, y_1) = a_1 x_1(y_1) + a_2 x_2\,(h, y_1) + y_0. \tag{7.3.5}$$

Подставляя выражения **(7.3.4)** для производных в **(7.3.3)**, получим:

$$\frac{dy_0}{dy_1} = (1-a_0)x_0 \left[-\frac{\alpha - lh}{(1-h)(1-lh)} \cdot \frac{dh}{dy_1} + \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1} \right] -$$

$$-\frac{\alpha_1 a_1 x_1}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1} - a_2 x_2 \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dy_1} + \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1} \right],$$

откуда

$$\frac{\partial h}{\partial y_1}=\frac{h(1-h)(1-lh)}{(1-\alpha_1)x_1+y_1}\cdot\frac{D_6-q\left[(1-\alpha_1)x_1+y_1\right]}{h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2}, \qquad \textbf{(7.3.6)}$$

где $D_6 = \alpha_0(1 - a_0)x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - \alpha_2 a_2 x_2$ — шестая детерминанта внешней торговли (см. § 7.2);

$q=\dfrac{q_1}{q_0}$ — отношение мировых цен на машины (оборудование) и сырье.

При $D_6 < 0$ наверняка $\dfrac{dh}{dy_1}<0,$ как и предполагалось выше, т.е. *при росте ввоза машин и оборудования и фиксации доли фондосоздающего сектора доля потребительского сектора в ресурсах сокращается.*

Поскольку $\dfrac{\partial h}{\partial y_1}<0$, то из **(7.3.4)** видно, что $\dfrac{\partial x_0}{\partial y_1}>0$ и $\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}>0$. Таким образом, при увеличении импорта машин и оборудования и проведении структурной политики индустриальной безопасности ($s_1 = \text{const}$) происходит рост собственного производства средств производства (топлива, электроэнергии, сырья, полуфабрикатов, машин, оборудования и т.д.).

Подставив теперь **(7.3.6)** в выражение (3) **(7.3.4)** для скорости роста удельного выпуска предметов потребления, получим:

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1}=\frac{x_2}{(1-\alpha_1)x_1+y_1}\times$$

$$\times\frac{(\alpha_0+\varepsilon\alpha_2)(1-a_0)x_0-\alpha_1 a_1 x_1-q\left[(1-\alpha_1)x_1+y_1\right]}{\varepsilon(1-a_0)x_0+a_2x_2}, \qquad \textbf{(7.3.7)}$$

где $\varepsilon=\varepsilon(h)=\dfrac{h(\alpha-lh)}{(1-h)(1-lh)}$ — возрастающая функция h при $h\le\dfrac{\alpha}{2l}$, которая при $h>\dfrac{\alpha}{2l}$ имеет участок падения, после чего вновь постоянно растет.

Выражение, определяющее знак производной удельного выпуска предметов потребления целесообразно включить в число детерминант внешней торговли:

$$D_8 = (\alpha_0 + \varepsilon\alpha_2)(1 - \alpha_0)x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - q[(1 - \alpha_1)x_1 + y_1]. \qquad \textbf{(7.3.8)}$$

Таким образом, *при увеличении импорта машин и оборудования и проведения структурной политики индустриальной безопасности* ($s_1 = \text{const}$) *удельное производство предметов потребления падает, если* $D_8 < 0$, *и растет, если* $D_8 > 0$.

Исследуем теперь изменение знака восьмой детерминанты. Прежде всего заметим, что $D_8 = D_8(s_1, y_1)$, т.е. эта детерминанта зависит только от доли (s_1) фондосоздающего сектора в ресурсах и удельного импорта (y_1) машин и оборудования. Первое слагаемое детерминанты работает на положительный знак, при этом сумма первого и второго слагаемых положительна, поэтому величина третьего слагаемого, которое содержит параметры внешней торговли, оказывает решающее влияние на знак восьмой детерминанты, а тем самым и на целесообразность внешней торговли.

▷ **Пример 7.1.** ***Исследование влияния внешней торговли на национальную экономику (первый вариант).*** В примере приведем результаты практических расчетов по реальным статистическим данным РФ. Так, старший преподаватель кафедры прикладной математики ГУУ Л.А. Константинова по данным за 1960—1991 гг. определила следующие коэффициенты производственных функций секторов (выпуски и ОПФ секторов — в млрд. руб. в сопоставимых ценах 1983 г., число занятых — в млн. чел.):

$$A_0 = 6{,}19,\ \alpha_0 = 0{,}46,\ A_1 = 1{,}35,\ \alpha_1 = 0{,}68,\ A_2 = 2{,}71,\ \alpha_2 = 0{,}49,$$

откуда видно, что действительно $\alpha_0 > \alpha_1$, $\alpha_0 > \alpha_2$.

По данным о внешнеторговом обороте СССР в 1987 г. получаем следующие удельные компоненты ввоза-вывоза (в расчете на одного занятого):

- $y_0 = 0{,}4$ тыс. руб./чел. (вывоз сырья и других материалов);
- $y_1 = 0{,}2$ тыс. руб./чел. (ввоз машин и оборудования);
- $y_2 = 0{,}2$ тыс. руб./чел. (ввоз предметов потребления).

Как видим из этих данных ввоз-вывоз в ценах 1983 г. был сбалансированным.

Благоприятна ли такая внешняя торговля для роста собственного производства? Ответим на этот вопрос при условии, что структурная политика состоит в том, чтобы поддерживать долю фондосоздающего сектора в ресурсах на уровне $s_1 = 0{,}14$ (именно такой была его доля в 1980-е гг.) и $l = 1$.

Прежде всего найдем при $\lambda = 0{,}05$ коэффициенты

$$B_i = A_i / \lambda^{\alpha_i}\ (B_0 = 24{,}56,\quad B_1 = 10{,}38,\quad B_2 = 11{,}78),$$

а с их помощью и удельные выпуски секторов по формулам **(6.2.1)**, **(6.2.8)**.

В качестве начального приближения x_1^0 выберем удельный выпуск фондосоздающего сектора при $s_1 = 0{,}14$ и в состоянии автаркии. В соответствии с полученными данными имеем:

$$x_1^0 = 1498{,}4 \cdot 0{,}14^{3{,}125} = 3{,}22.$$

С помощью формулы **(6.2.1)** по методу последовательных приближений находим $x_1 = 3{,}6$. Как видим, при ежегодном удельном импорте инвестиционных товаров 0,2 тыс. руб./чел. собственное удельное производство этих товаров возросло по сравнению с состоянием автаркии с 3,22 до 3,6 тыс. руб./чел.

По формулам **(6.2.8)** при $s_1 = 0{,}14$ определяем с точностью до h удельные выпуски материального и потребительского секторов:

$$x_0 = B_0(1-h)(1-s_1)(x_1+y_1)^{\alpha_0} = 39{,}03(1-h);$$
$$x_2 = B_2(1-h)(1-s_1)(x_1+y_1)^{\alpha_2} = 40{,}63h.$$

Полученные значения подставляем в уравнение материального баланса, в котором используем коэффициенты прямых материальных затрат, найденные путем агрегирования и осреднения МОБ РФ за 1985—1987 гг. ($a_0 = 0{,}39$, $a_1 = 0{,}29$, $a_2 = 0{,}52$):

$$0{,}61 \cdot 39{,}03(1-h) = 0{,}29 \cdot 3{,}6 + 0{,}52 \cdot 40{,}63h + 0{,}4,$$

откуда $h = 0{,}5$.

Зная h, окончательно определяем удельные выпуски секторов:

$$x_0 = 19{,}52, \quad x_1 = 3{,}6, \quad x_2 = 20{,}32,$$

а также вспомогательную величину

$$\varepsilon = \frac{h}{1-h} = 1.$$

При найденных значениях удельных выпусков детерминанта D_8 принимает следующее значение:

$$D_8 = (\alpha_0 + \varepsilon\alpha_2)(1-a_0)x_0 - \alpha_1 a_1 x_1 - q[(1-\alpha_1)x_1 + y_1] = 10{,}6 - 3{,}35q.$$

Если конъюнктура благоприятна, то $q_0 \geq q_1$, поэтому $q = q_1/q_0 \leq 1$, и восьмая детерминанта заведомо положительна.

Из положительности восьмой детерминанты следует, что имеются резервы для расширения внешней торговли в том же направлении, т.е. путем роста импорта машин и оборудования в обмен на увеличивающийся вывоз сырья, при этом будет увеличиваться собственное производство средств производства и предметов потребления. Как только D_8 обратится в нуль, дальнейшее расширение такого типа внешней торговли станет нецелесообразным, поскольку будет приводить к снижению удельного производства предметов потребления (при продолжающемся росте удельного выпуска средств производства). ▶

Перераспределение ресурсов между материальным и фондосоздающим секторами

Пусть теперь $\theta_2 = \text{const}$, $s_2 = \text{const}$, тогда при $\theta_1 = s_1$ $d\theta_0 = ds_0$, $d\theta_1 = ds_1 = -ds_0$. Как и в случае первого варианта будем исследовать изменение удельных выпусков секторов при увеличении ввоза инвестиционных товаров на dy_1, которое должно быть компенсировано увеличением вывоза материалов на dy_0, при этом согласно уравнению внешнеторгового баланса

$$q_0\ dy_0 = q_1\ dy_1,$$

или

$$dy_0 = q\ dy_1 \left(q = \frac{q_1}{q_0} \right).$$

При $\theta_1 = s_1$ удельные выпуски секторов следующим образом зависят от долей ресурсов, собственного удельного выпуска и удельного импорта инвестиционных товаров:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} s_0^{\alpha_0} (x_1 + y_1)^{\alpha_0}, \\ x_1 &= B_1 s_1 (x_1 + y_1)^{\alpha_1}, \\ x_2 &= B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} s_2^{\alpha_2} (x_1 + y_1)^{\alpha_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.3.9)}$$

По **(7.3.9)** найдем производные удельных выпусков:

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \frac{x_1 (x_1 + y_1)}{s_1 b}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\alpha_1 x_1}{b},$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} = \frac{(1-\alpha_0) x_0}{\theta_0}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial s_0} = \frac{\alpha_0 s_0}{s_0}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial y_1} = \frac{\alpha_0 x_0}{x_1 + y_1} (1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}) = \frac{\alpha_0 x_0}{b},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\alpha_2 x_2}{x_1 + y_1} (1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}) = \frac{\alpha_2 x_2}{b},$$

где $b = (1 - \alpha_1) x_1 + y_1$.

При сделанных предположениях дифференциалы удельных выпусков секторов примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} dx_0 &= x_0 \left[\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0} + \frac{\alpha_0}{s_0} \right) ds_0 + \frac{\alpha_0\ dy_1}{b} \right], \\ dx_1 &= \frac{x_1}{b} \left[-\frac{(x_1 + y_1) ds_0}{s_1} + \alpha_1\ dy_1 \right], \\ dx_2 &= \frac{\alpha_2 x_2\ dy_1}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.3.10)}$$

Подставим их в уравнение материального баланса в дифференциалах:

$$\left[\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0}+\frac{\alpha_0}{s_0}\right)ds_0+\frac{\alpha_0\ dy_1}{b}\right](1-a_0)x_0 =$$

$$=\frac{\left[-(x_1+y_1)ds_0+\alpha_1 s_1\ dy_1\right]a_1 x_1}{bs_1}+\frac{\alpha_2\ dy_1}{b}a_2 x_2+q\ dy_1,$$

откуда и находим объем перелива ресурсов в материальный сектор ds_0, обеспечивающий выполнение уравнения материального баланса при увеличении ввоза инвестиционных товаров на dy_1:

$$ds_0=\frac{-\alpha_0(1-a_0)x_0+\alpha_1 a_1 x_1+\alpha_2 a_2 x_2+qb}{b\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0}+\frac{\alpha_0}{s_0}\right)(1-a_0)x_0+\frac{(x_1+y_1)}{s_1}a_1 x_1}dy_1. \qquad \textbf{(7.3.11)}$$

Запишем уравнение материального баланса в следующей форме:

$$-(1-a_0)x_0+a_1 x_1+a_2 x_2+qy_1=0.$$

Из этой записи видно, что при $\alpha_0<\alpha_1$, $\alpha_0<\alpha_2$ и $b=(1-\alpha_1)x_1+y_1>y_1$ числитель правой части **(7.3.11)** положителен, поэтому действительно $ds_0>0$, т.е. имеет место перелив дополнительных ресурсов в материальный сектор за счет фондосоздающего.

Из формул **(7.3.10)** непосредственно вытекает, что при $ds_0>0$, $dy_1>0$ производство материалов и предметов потребления возрастает. Изменение собственного производства инвестиционных товаров определяется знаком выражения

$$-\frac{(x_1+y_1)ds_0}{s_1}+\alpha_1\ dy_1.$$

Подставим в него значение ds_0 по формуле **(7.3.11)**, тогда

$$-\frac{(x_1+y_1)ds_0}{s_1}+\alpha_1\ dy_1=$$

$$=\frac{\left[\alpha_0+\alpha_1 s_1\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0}+\frac{\alpha_0}{s_0}\right)\frac{b}{x_1+y_1}\right](1-a_0)x_0-\alpha_2 a_2 x_2-qb}{s_1\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0}+\frac{\alpha_0}{s_0}\right)\frac{b}{x_1+y_1}(1-a_0)x_0+a_1 x_1}dy_1,$$

поэтому для положительности dx_1 необходимо, чтобы числитель последнего выражения был положителен (примем его за девятую детерминанту):

$$D_9=\left[\alpha_0+\alpha_1 s_1\left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0}+\frac{\alpha_0}{s_0}\right)\frac{1-\alpha_1+y_1/x_1}{1+y_1/x_1}\right](1-a_0)x_0-$$

$$-\alpha_2 a_2 x_2-q\left[(1-\alpha_1)x_1+y_1\right]>0. \qquad \textbf{(7.3.12)}$$

Таким образом, *для национальной экономики с сырьевой направленностью, интегрированной в мировой рынок, целесообразно только тогда увеличивать импорт инвестиционных товаров (при* $\theta_1 = s_1$ *и переливе ресурсов из фондосоздающего сектора в материальный), когда выражение* **(7.3.12)** *положительно, ибо при таком увеличении возрастают удельные выпуски всех секторов.*

Как только выражение **(7.3.12)** станет отрицательным, дальнейшее увеличение импорта машин и оборудования окажется целесообразным.

Множитель $q = \dfrac{q_1}{q_0}$ в последнем (отрицательном!) члене выражения **(7.3.12)** характеризует конъюнктуру мирового рынка: при $q_1 < q_0$, $q < 1$ конъюнктура благоприятна, поскольку рубль проданного сырья стоит дороже рубля машин и оборудования.

▷ **Пример 7.2.** ***Исследование влияния внешней торговли на национальную экономику (второй вариант).*** Используем исходные данные примера 7.1. Согласно им $\theta_1 = s_1 = 0{,}14$; $\theta_0 = \theta_2 = s_0 = s_2 = 0{,}43$ и

$$x_0 = 19{,}52, \quad x_1 = 3{,}6, \quad x_2 = 20{,}32 \text{ (тыс. руб.[1]/чел.)},$$

$$y_0 = 0{,}4, \quad y_1 = 0{,}2, \quad y_2 = 0{,}2 \text{ (тыс. руб.[1] /чел.)}.$$

Кроме того, $a_0 = 0{,}39$, $a_1 = 0{,}29$, $a_2 = 0{,}52$; $\alpha_0 = 0{,}46$, $\alpha_1 = 0{,}68$, $\alpha_2 = 0{,}49$.

При таких данных модули слагаемых в выражении **(7.3.12)** равны:

$$\left[\alpha_0 + \alpha_1 s_1 \left(\frac{1-\alpha_0}{\theta_0} + \frac{\alpha_0}{s_0}\right) \frac{1-\alpha_1 + y_1/x_1}{1 + y_1/x_1}\right](1-a_0)x_0 = 6{,}43 \text{ тыс. руб./чел.},$$

$$\alpha_2 a_2 x_2 = 5{,}17 \text{ тыс. руб./чел.}$$

$$q\left[(1-\alpha_1)x_1 + y_1\right] = 1{,}32q \text{ тыс. руб./чел.},$$

поэтому

$$D_9 = 1{,}26 - 1{,}32q.$$

Если мировые цены на материалы и инвестиционные товары одинаковы, т.е. $q_0 = q_1$, то $q = 1$ и

$$D_9 = -0{,}06 < 0,$$

поэтому дальнейшее расширение торговли нецелесообразно.

---

[1] В ценах 1983 г.

При более благоприятной конъюнктуре, например при $q_1 = 0,9q_0$, $q = 0,9$

$$D_9 = 0,07 > 0,$$

поэтому дальнейшее расширение торговли еще целесообразно. ▶

7.4. Влияние конкуренции материального и потребительского секторов на внешнюю торговлю

Ранее изменения объема и структуры внешней торговли рассматривались с позиций единого критерия. Исследуем такие изменения в условиях конкуренции секторов.

В условиях либерализации внешней торговли многие предприятия и объединения наряду с производственной деятельностью стали осуществлять и чисто торговые операции, основанные на разнице цен внутреннего и внешнего рынков. На макроуровне это выразилось в том, что материальный сектор, производящий и экспортирующий энергоресурсы и сырье, начал торговать на внутреннем рынке импортными потребительскими товарами. Однако ведь и потребительский сектор сейчас занимается торговлей импортными потребительскими товарами.

В основе исследования — подмножество открытой трехсекторной модели экономики, которое получено из открытой трехсекторной модели путем фиксации удельного выпуска фондосоздающего сектора. В результате имеем модель конкуренции материального и потребительского секторов.

Исследование проводится в стационарном состоянии, в удельных показателях и в предположении, что производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа:

$$X_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \quad i = 0, 2,$$

где X_i — выпуск i-го сектора в физическом исчислении (например, в неизменных ценах некоторого базового года);

K_i, L_i — основные производственные фонды и число занятых в i-м секторе.

Модель конкуренции материального и потребительского секторов (стационарный вариант, удельные показатели)

Производственные возможности секторов:

$$x_i = B_i \theta_i^{1-\alpha_i} (x_{1i} + \beta_1 y_{1i})^{\alpha_i}, \; B_i = \frac{A_i}{\lambda_i^{\alpha_i}}, \; i = 0,2. \tag{7.4.1}$$

Натуральные балансы:

- трудовой —

$$\theta_0 + \theta_2 = 1 - \theta_1; \tag{7.4.2}$$

- инвестиционный —

$$x_{10} + x_{12} = x_1 - x_{11}; \qquad \textbf{(7.4.3)}$$

- материальный —

$$\left(1 - a_0\right) x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + z_0. \qquad \textbf{(7.4.4)}$$

Внешнеторговые балансы секторов:

- материального —

$$q_0 z_0 = q_1^+ y_{10} + q_2^+ y_{20}; \qquad \textbf{(7.4.5)}$$

- потребительского —

$$q_2 z_2 = q_1^+ y_{12} + q_2^+ y_{22}. \qquad \textbf{(7.4.6)}$$

Национальные стоимостные балансы секторов:

- материального —

$$p_0 \left[\left(1 - a_0\right) x_0 - z_0\right] + p_2 \beta_2 y_{20} =$$

$$= p_1 x_{10} + w_0 x_0 + t_0 x_0 + d_0 z_0 + d_1^+ y_{10} + d_2^+ y_{20} + \pi_0; \qquad \textbf{(7.4.7)}$$

- потребительского —

$$p_2 \left(x_2 - z_2\right) + p_2 \beta_2 y_{22} =$$

$$= p_0 a_2 x_2 + p_1 x_{12} + w_2 x_2 + t_2 x_2 + d_2 z_2 + d_1^+ y_{12} + d_2^+ y_{22} + \pi_2. \qquad \textbf{(7.4.8)}$$

Квоты на импорт:

- инвестиционных товаров (индустриальная безопасность) —

$$y_{10} + y_{12} \le \gamma_1 x_1; \qquad \textbf{(7.4.9)}$$

- потребительских товаров (потребительская безопасность) —

$$y_{20} + y_{22} \le \gamma_2 x_2. \qquad \textbf{(7.4.10)}$$

Квоты на экспорт:

- материалов —

$$z_0 \le \bar{z}_0, \qquad \textbf{(7.4.11)}$$

- предметов потребления —

$$z_2 \le \bar{z}_2. \qquad \textbf{(7.4.12)}$$

Удельное непроизводственное потребление:

$$c = (1 + \gamma_2) x_2 - z_2. \qquad \textbf{(7.4.13)}$$

В приведенной модели использованы следующие обозначения:

$x_i = \dfrac{X_i}{L}$ — удельный выпуск (народно-хозяйственная производительность) i-го сектора;

$\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ — доля i-го сектора в распределении трудовых ресурсов;

$L = L(0)e^{vt}$ — общее число занятых в трех секторах;

v — темп прироста числа занятых;

μ_i — коэффициент износа ОПФ i-го сектора;

$\lambda_i = \mu_i + v$ — коэффициент сокращения фондовооруженности i-го сектора за счет износа ОПФ и прироста числа занятых;

β_i — коэффициент усиления потребительских свойств i-го импортного товара по сравнению с отечественным (при $\beta_i > 1$ имеет место усиление, при $\beta_i < 1$ — ослабление);

x_{1i} — удельное производственное потребление отечественных инвестиционных товаров i-м сектором;

y_{ij} — ввоз i-го товара j-м сектором;

a_i — коэффициент прямых материальных затрат i-го сектора;

p_i — внутренняя цена i-го товара;

q_i, q_i^+ — экспортная и импортная цены i-го товара на мировом рынке;

$z_i, \overline{z}_i$ — вывоз и квота на экспорт i-го сектора;

π_i — прибыль i-го сектора;

w_i — ставка заработной платы на продукцию i-го сектора;

t_i — налоговая ставка на продукцию i-го сектора;

d_i, d_i^+ — экспортная и импортная пошлины на i-й товар;

γ_i — коэффициент квотирования импорта i-го товара;

c — удельное непроизводственное потребление.

Исследование будем проводить в малых приращениях $\Delta y_{22} = \delta$ при фиксированных значениях инвестиционных ресурсов x_{12}, y_{12}, вкладываемых в потребительский сектор, кроме того, ограничения **(7.4.9)**, **(7.4.10)** будем рассматривать как равенства. Если инвестиционные ресурсы фиксированы, то изменения в удельных выпусках, как это видно из **(7.4.1)**, могут произойти только за счет перераспределения трудовых ресурсов:

$$\Delta x_0 = \frac{(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0}\Delta\theta_0, \quad \Delta x_2 = \frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}\Delta\theta_2. \qquad \mathbf{(7.4.14)}$$

Однако согласно **(7.4.2)** $\Delta\theta_0 = -\Delta\theta_2$, откуда

$$\Delta x_0 = -\frac{(1-\alpha_0)}{\theta_0}\Delta\theta_2, \qquad \mathbf{(7.4.15)}$$

т.е. при перераспределении трудовых ресурсов выпуск одного из секторов увеличивается, а другого — уменьшается. Разумеется, такая же картина имеет место и при перераспределении инвестиционных ресурсов.

Перераспределение трудовых ресурсов инициировано ростом импорта потребительских товаров потребительским сектором. В самом деле, из соотношения **(7.4.10)**, рассматриваемого как равенство, вытекает, что

$$\Delta y_{20} = \gamma_2 \Delta x_2 - \delta,$$

откуда согласно уравнению внешнеторгового баланса материального сектора **(7.4.5)** получаем

$$\Delta z_0 = \frac{q_2^+}{q_0} \Delta y_{20} = \frac{q_2^+}{q_0} (\gamma_2 \Delta x_2 - \delta). \tag{7.4.16}$$

Поставив **(7.4.14)**, **(7.4.15)**, **(7.4.16)** в уравнение материального баланса **(7.4.4)** в приращениях, имеем:

$$-(1-a_0)\frac{(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0}\Delta\theta_2 = \left(a_2 + \frac{q_2^+ \gamma_2}{q_0}\right)\frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}\Delta\theta_2 - \frac{q_2^+}{q_0}\delta.$$

Отсюда

$$\Delta\theta_2 = \frac{q_2^+ \delta}{q_0\left[(1-a_0)\frac{(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0} + \left(a_2 + \frac{q_2^+}{q_0}\gamma_2\right)\frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}\right]} > 0, \tag{7.4.17}$$

поэтому из **(7.4.14)**, **(7.4.15)** вытекает, что $\Delta x_0 < 0,\ \Delta x_2 > 0$.

Рассмотрим, как эти изменения отразятся на прибылях секторов. Разрешив внешнеторговые балансы секторов относительно z_0, z_2 и подставив последние в **(7.4.7)**, **(7.4.8)**, получаем следующие выражения для прибылей секторов:

$$\pi_0 = b_0 x_0 + b_{20} y_{20} - p_1 x_{10} - b_{10} y_{10}, \tag{7.4.18}$$

$$\pi_2 = b_2 x_2 + b_{22} y_{22} - p_1 x_{12} - b_{12} y_{12}, \tag{7.4.19}$$

где $i = 0, 2$;

$b_i = p_i - p_0 a_i - w_i - t_i$ — прибыль i-го сектора на единицу выпуска;

$b_{2i} = p_2 \beta_2 - d_2^+ - \frac{q_2^+}{q_i}(p_i + d_i)$ — прибыль i-го сектора на единицу импорта потребительских товаров;

$b_{1i} = d_1^+ + \frac{q_1^+}{q_i}(p_i + d_i)$ — полные затраты i-го сектора на единицу импорта инвестиционных товаров.

Таким образом, первый член выражений **(7.4.18)**, **(7.4.19)** для удельных чистых прибылей секторов — удельная прибыль от производственной деятельности, второй член — удельная прибыль от внешнеторговой деятельности, последние два члена (со знаком минус) — полные расходы на приобретение отечественных и импортных инвестиционных товаров.

Далее будем считать, что $b_{20} > 0$, $b_{22} > 0$, поскольку секторы только тогда будут импортировать потребительские товары, когда каждая единица импорта приносит им прибыль. Точно так же $b_0 > 0$, $b_2 > 0$, иначе производство нецелесообразно.

Из **(7.4.18)** и **(7.4.19)** имеем:

$$\Delta\pi_0 = b_0\Delta x_0 + b_{20}\Delta y_{20} = b_0\Delta x_0 + b_{20}\left(\gamma_2\Delta x_2 - \delta\right) < 0, \qquad \textbf{(7.4.20)}$$

$$\Delta\pi_2 = b_2\Delta x_2 + b_{22}\delta > 0. \qquad \textbf{(7.4.21)}$$

Приращение прибыли материального сектора отрицательно, поскольку и первый его член $\left(b_0\Delta x_0 < 0\right)$ и второй $\left(b_{20}\left(\gamma_2\Delta x_2 - \delta\right) < 0\right)$ отрицательны, причем второе верно, поскольку

$$\gamma_2\Delta x_2 - \delta = \left[\frac{\gamma_2\dfrac{q_2^+}{q_0}}{\left(1-a_0\right)\dfrac{x_0\left(1-\alpha_2\right)\theta_2}{x_2\left(1-\alpha_2\right)\theta_0} + \left(a_2 + \gamma_2\dfrac{q_2^+}{q_0}\right)} - 1\right]\delta <$$

$$< \left(\frac{\gamma_2\dfrac{q_2^+}{q_0}}{a_2 + \gamma_2\dfrac{q_2^+}{q_0}} - 1\right)\delta < 0.$$

Приращение прибыли потребительского сектора положительно, поскольку оба слагаемых приращения положительны.

Итак, при движении в допустимой области стратегий потребительского сектора $\left(x_{12},\ y_{12},\ y_{22}\right)$ вдоль прямой $x_{12} = \text{const}$, $y_{12} = \text{const}$ в направлении увеличения координаты $y_{22}\left(\Delta y_{22} = \delta > 0\right)$, начиная с $y_{22} = 0$, происходит переток трудовых ресурсов из материального сектора в потребительский, поэтому выпуск и прибыль потребительского сектора растут, в то время как выпуск и прибыль материального сектора падают. Следовательно, при рассмотрении двух сечений допустимой области $y_{22} = \text{const}$ и $y_{22} + \Delta y_{22} = \text{const}$ обнаруживаем, что через точку $\left(x_{12}, y_{12}\right)$ в первом сечении проходят изопрофиты (линии постоянной прибыли) материального и потребительского секторов со значениями прибылей $\pi_0 = \text{const}$, $\pi_2 = \text{const}$, в то время как во втором случае через эту же точку проходят:

1) изопрофита потребительского сектора с бóльшим значением прибыли $(\pi_2 + \Delta\pi_2 > \pi_2)$; при этом изопрофита с прежним значением прибыли (π_2) отодвинулась на положение изопрофиты с меньшей прибылью;

2) изопрофита материального сектора с меньшим значением прибыли $(\pi_0 + \Delta\pi_0 < \pi_0)$; при этом изопрофита с прежним значением прибыли (π_0) отодвинулась на положение изопрофиты с бóльшим значением прибыли.

Расположение описанных изопрофит показано на рис. 7.3, 7.4. Точка A имеет одинаковые координаты x_{12}, y_{12} и в сечении $y_{22} = \text{const}$, и в сечении $y_{22} + \delta = \text{const}$. На рис. 7.4 сплошными линиями показаны изопрофиты секторов с прежними значениями прибылей, пунктирными — с новыми значениями прибылей.

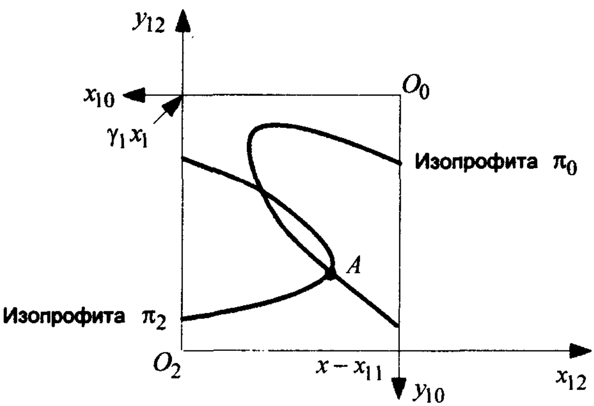

Рис. 7.3. ***Диаграмма Эджворта—Боули в сечении*** $y_{22} = \text{const}$

Пространственная изопрофита (т.е. поверхность постоянной прибыли в трехмерном пространстве x_{11}, y_{12}, y_{22}) потребительского сектора состоит из изопрофит сечений, расширяющихся, как видно из рис. 7.4, по мере роста y_{22}, а пространственная изопрофита материального сектора — это сужающаяся поверхность по мере роста y_{22}.

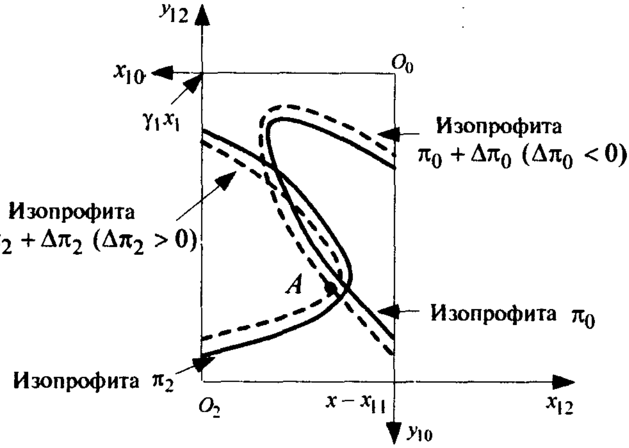

Рис. 7.4. ***Диаграмма Эджворта—Боули в сечении*** $y_{22} + \delta = \text{const}$

Без учета условия **(7.4.12)** y_{22} можно увеличить согласно **(7.4.10)** до величины $\gamma_2 x_2$ (при этом $y_{20} = 0$), откуда согласно **(7.4.6)** $z_0 = \frac{q_1^+}{q_0} y_{10}$. Поэтому максимально допустимое значение $\bar{\theta}_2$ определяется из уравнения материального баланса **(7.4.4)**, в котором $x_{10} = x_1 - x_{11} - x_{12}$, $y_{10} = \gamma_1 x_1 - y_{12}$:

$$(1 - a_0) B_0 (1 - \theta_1 - \bar{\theta}_2)^{1-\alpha_0} (x_{10} + \beta_1 y_{10})^{\alpha_0} =$$

$$= a_1 x_1 + a_2 B_2 \bar{\theta}_2^{1-\alpha_2} (x_{12} + \beta_1 y_{12})^{\alpha_2} + \frac{q_1^+}{q_0} y_{10}, \qquad \textbf{(7.4.22)}$$

что и позволяет найти максимальные значения:

$$\bar{\theta}_2 = B_2 \bar{\theta}_2^{1-\alpha_2} (x_{12} + \beta_1 y_{12})^{\alpha_2}, \quad \bar{y}_{22} = \gamma_2 \bar{y}_2. \qquad \textbf{(7.4.23)}$$

Если к условию **(7.4.23)** добавить условие **(7.4.12)**, то окончательно получим:

$$\bar{y}_{22}(x_{12}, y_{12}) = \min\left(\frac{q_2}{q_2^+} \bar{z}_2 - \frac{q_1^+}{q_2^+} y_{12}, \ \gamma_2 \bar{x}_2\right). \qquad \textbf{(7.4.24)}$$

Нижней границей y_{22} без учета **(7.4.11)** является $\underline{y}_{22} = 0$. Если к последнему условию добавить **(7.4.11)**, то получим

$$\underline{y}_{22} = (x_{12}, y_{12}) = \max\left[0,\ \frac{q_1^+}{q_2^+}(\gamma_1 x_1 - y_{12}) + \gamma_2 \underline{x}_2 - \frac{q_0}{q_2^+}\bar{z}_0\right], \qquad \textbf{(7.4.25)}$$

где $\underline{x}_2 = B_2 \underline{\theta}_2^{1-\alpha_2}(x_{12} + \beta_1 y_{12})^{\alpha_2}$.

При этом $\underline{\theta}_2$ является решением уравнения

$$(1-a_0) B_0 (1 - \theta_1 - \underline{\theta}_2)^{1-\alpha_2} (x_{10} + \beta_1 y_{10})^{\alpha_0} =$$

$$= a_1 x_1 + a_2 B_2 \underline{\theta}_2^{1-\alpha_2} (x_{12} + \beta_1 y_{12})^{\alpha_2} + \bar{z}_0.$$

Итак, допустимая область стратегий потребительского сектора в трехмерном пространстве (x_{12}, y_{12}, y_{22}) ограничена сверху (по y_{22}) поверхностью **(7.4.24)**, снизу — поверхностью **(7.4.25)**. Ограничениями по x_{12}, y_{12} служат условия **(7.4.3)**, **(7.4.9)**. Одновременно это и допустимая область стратегий материального сектора x_{10}, y_{10}, y_{20}, поскольку последние связаны с x_{12}, y_{12}, y_{22} соотношениями **(7.4.3)**, **(7.4.9)** и **(7.4.10)**.

Из каждой точки допустимой области x_{12}, y_{12}, y_{22} потребительский сектор стремится перемещаться в направлении наибольшего роста своей прибыли, т.е. в направлении $\operatorname{grad} \pi_2 = \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x_{12}}, \frac{\partial \pi_2}{\partial y_{12}}, \frac{\partial \pi_2}{\partial y_{22}}\right)$, в то время как материальный — в направлении своего градиента, т.е. $\operatorname{grad} \pi_0 = \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial x_{12}}, \frac{\partial \pi_0}{\partial y_{12}}, \frac{\partial \pi_0}{\partial y_{22}}\right)$. Равнодействующая этих устремлений — градиент суммарной прибыли $\operatorname{grad} \pi_0 + \operatorname{grad} \pi_2 = \operatorname{grad} \pi$, $\pi = \pi_0 + \pi_2$.

«Сила» равнодействующего устремления по каждой координате измеряется модулем значения соответствующей компоненты градиента.

Назовем ***изоградой*** по x_{12} (соответственно по y_{12}, y_{22}) поверхность постоянства первой (соответственно второй, третьей) компоненты градиента.

Нулевые изограды — это поверхности равновесия по соответствующей координате:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_{12}} = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial y_{12}} = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial y_{22}} = 0.$$

Каждая нулевая изограда разбивает допустимую область на две подобласти. В одной из них соответствующая компонента градиента положительна, следовательно, рост прибыли происходит при увеличении соответствующей координаты. В другой подобласти компонента отрицательна, поэтому прибыль возрастает при уменьшении соответствующей координаты.

Найдем уравнения нулевых изоград.

Используя **(7.4.3)**, **(7.4.9)**, **(7.4.10)**, **(7.4.18)**, **(7.4.19)**, имеем:

$$\pi = b_0 x_0 + \left(b_2 + \gamma_2 b_{20}\right) x_2 - b_{20} y_{22} +$$

$$+ b_{22} y_{22} - p_1 \left(x_1 - x_{11}\right) - b_{10}\left(\gamma_1 x_1 - y_{12}\right) - b_{12} y_{12},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_{12}} = b_0 \frac{\partial x_0}{\partial x_{10}} \cdot \frac{d x_{10}}{d x_{12}} + \left(b_2 + \gamma_2 b_{20}\right) \frac{\partial x_2}{\partial x_{12}}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_{10}} = \frac{\left(1 - \alpha_0\right) x_0}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta_0}{\partial x_{10}} + \frac{\alpha_0 x_0}{x_{10} + \beta_1 y_{10}},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_{12}} = \frac{\left(1 - d_2\right) x_2}{\theta_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{12}} + \frac{\alpha_2 x_2}{x_{12} + \beta_1 y_{12}},$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial x_{10}} = \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{12}}, \quad \frac{d x_{10}}{d x_{12}} = -1,$$

то

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_{12}} = -b_0 \left[\frac{\left(1 - \alpha_0\right) x_0}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{12}} + \frac{\alpha_0 x_0}{x_{10} + \beta_1 y_{10}}\right] +$$

$$+ \left(b_2 + \gamma_2 b_{20}\right) \left[\frac{\left(1 - \alpha_2\right) x_2}{\theta_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{12}} + \frac{\alpha_2 x_2}{x_{12} + \beta_1 y_{12}}\right],$$

откуда следует уравнение нулевой изограды по x_{12}:

$$b_0 \left[\frac{\left(1 - \alpha_0\right) x_0}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{12}} + \frac{\alpha_0 x_0}{x_{10} + \beta_1 y_{10}}\right] =$$

$$= \left(b_2 + \gamma_2 b_{20}\right) \left[\frac{\left(1 - \alpha_2\right) x_2}{\theta_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{12}} + \frac{\alpha_2 x_2}{x_{12} + \beta_1 y_{12}}\right]. \qquad \textbf{(7.4.26)}$$

Аналогично определяются нулевые изограды по y_{12} и y_{22}:

$$b_0 \left[\frac{\left(1 - \alpha_0\right) x_0}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial y_{12}} + \frac{\beta_1 \alpha_0 x_0}{x_{10} + \beta_1 y_{10}}\right] - b_{10} =$$

$$= \left(b_2 + \gamma_2 b_{20}\right) \left[\frac{\left(1 - \alpha_2\right) x_2}{\theta_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial y_{12}} + \frac{\beta_1 \alpha_2 x_2}{x_{12} + \beta_1 y_{12}}\right] - b_{12}, \qquad \textbf{(7.4.27)}$$

$$\frac{b_0(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0}\cdot\frac{\alpha\theta_2}{\partial y_{22}}+b_{20}=(b_2+\gamma_2 b_{20})\cdot\frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial y_{22}}+b_{22}. \quad \textbf{(7.4.28)}$$

Производные $\frac{\partial\theta_2}{\partial x_{12}}$, $\frac{\partial\theta_2}{\partial y_{12}}$, $\frac{\partial\theta_2}{\partial y_{22}}$ находим путем дифференцирования материального баланса:

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x_{12}}=-\frac{(1-a_0)\cdot\frac{\alpha_0 x_0}{x_{10}+\beta_1 y_{10}}+\left(a_2+\frac{q_2^+}{q_0}\gamma_2\right)\frac{\alpha_2 x_2}{x_{12}+\beta_1 y_{12}}}{(1-a_0)\cdot\frac{(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0}+\left(a_2+\frac{q_2^+}{q_0}\gamma_2\right)\cdot\frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}}, \quad \textbf{(7.4.29)}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial y_{12}}=-\frac{(1-a_0)\cdot\frac{\beta_1\alpha_0 x_0}{x_{10}+\beta_1 y_{10}}+\left(a_2+\frac{q_2^+}{q_0}\gamma_2\right)\frac{\beta_1\alpha_2 x_2}{x_{12}+\beta_1 y_{12}}-\frac{q_1^+}{q_0}}{(1-a_0)\cdot\frac{(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0}+\left(a_2+\frac{q_2^+}{q_0}\gamma_2\right)\cdot\frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}}, \quad \textbf{(7.4.30)}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial y_{22}}=\frac{\frac{q_2^+}{q_0}}{(1-a_0)\cdot\frac{(1-\alpha_0)x_0}{\theta_0}+\left(a_2+\frac{q_2^+}{q_0}\gamma_2\right)\cdot\frac{(1-\alpha_2)x_2}{\theta_2}}. \quad \textbf{(7.4.31)}$$

Разрешив (7.4.26) относительно $\frac{\partial\theta_2}{\partial x_{12}}$, приравниваем полученное выражение правой части (7.4.29) и тем самым получаем уравнение нулевой изограды по x_{12}, не содержащее производную $\frac{\partial\theta_2}{\partial x_{12}}$:

$$\frac{b_0\alpha_0 f_0-\tilde{b}_2\alpha_2 f_2}{b_0(1-\alpha_0)l_0-\tilde{b}_2(1-\alpha_2)l_2}=\frac{(1-a_0)\alpha_0 f_0+\tilde{\alpha}_2\alpha_2 f_2}{(1-a_0)(1-\alpha_0)l_0+\tilde{\alpha}_2(1-\alpha_2)l_2}, \quad \textbf{(7.4.32)}$$

где $f_i=\frac{x_i}{x_{1i}+\beta_1 y_{1i}}$ — фондоотдача i-го сектора, $i=0,2$;

$l_i=\frac{x_i}{\theta_i}=\frac{X_i}{L_i}$ — производительность труда в i-м секторе, $i=0,2$;

$\tilde{a}_2 = a_2 + \gamma_2 \dfrac{q_2^+}{q_2}$ — материалоемкость единицы выпуска потребительских товаров с учетом импортной нагрузки $\gamma_2 \dfrac{q_2^+}{q_2}$;

$\tilde{b}_2 = b_2 + \gamma_2 b_{20}$ — чистая прибыль на единицу выпуска потребительских товаров с учетом прибыли от продажи на внутреннем рынке импортных потребительских товаров, закупленных материальным сектором.

Подобным же образом находим уравнения нулевых изоград, не содержащих производные θ_2, по y_{12}:

$$\frac{\left(b_0\alpha_0 f_0 - \tilde{b}_2\alpha_2 f_2\right) - \dfrac{1}{\beta_1}\left(b_{10} - b_{12}\right)}{b_0\left(1-\alpha_0\right)l_0 - \tilde{b}_2\left(1-\alpha_2\right)f_2} = \frac{\left[\left(1-\alpha_0\right)\alpha_0 f_0 + \tilde{a}_2\alpha_2 f_2\right] - \dfrac{q_1^+}{\beta_1 q_0}}{\left(1-a_0\right)\left(1-\alpha_0\right)l_0 + \tilde{a}_2\left(1-\alpha_2\right)l_2}, \tag{7.4.33}$$

а также по y_{22}:

$$\frac{\tilde{b}_2\left(1-\alpha_2\right)l_2 - b_0\left(1-\alpha_0\right)l_0}{\left(1-a_0\right)\left(1-\alpha_0\right)l_0 - \tilde{a}_2\left(1-\alpha_2\right)l_2} = \frac{q_0}{q_2^+}\left(b_{20} - b_{22}\right). \tag{7.4.34}$$

На рис. 7.5 показаны (без учета квот $\bar{z}_0$, $\bar{z}_2$) нулевые изограды (в сечении $y_{22} = 0$) по x_{12} (под номером 1), по y_{12} (под номером 2) и по y_{22} (под номером 3). Стрелками указаны направления проекций $\operatorname{grad}\pi$ на плоскость $y_{22} = 0$. Левая нижняя область, ограниченная нулевой изоградой по y_{12}, — область *положительного неравновесия.* В этой области $\operatorname{grad}\pi > 0$, т.е. имеется тенденция движения в сторону увеличения всех координат x_{12}, y_{12}, y_{22}. Правая верхняя область, ограниченная нулевой изоградой по y_{22}, — область *отрицательного неравновесия.* В этой области $\operatorname{grad}\pi < 0$, т.е. имеется тенденция движения в сторону уменьшения всех координат x_{12}, y_{12}, y_{22}. В промежутке между областями положительного и отрицательного неравновесий находится область *относительного равновесия.* В этой области компонснты $\operatorname{grad}\pi$ имеют разные знаки и относительно малы по модулю.

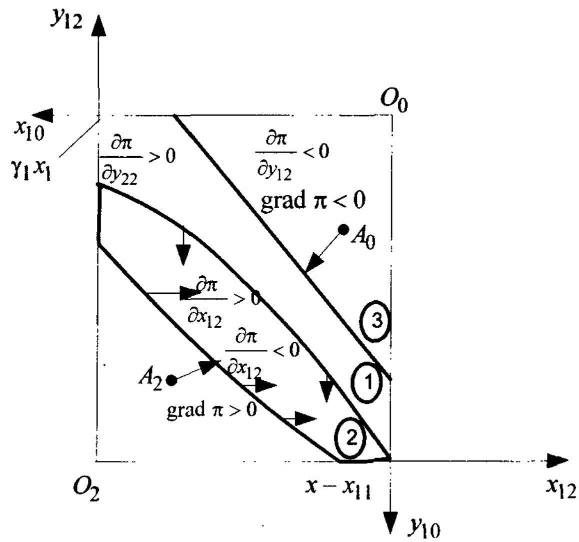

Рис. 7.5. ***Области относительного равновесия, положительного и отрицательного неравновесий в сечении*** $y_{22} = 0$

Особый интерес представляет та часть области относительного равновесия, которая заключена между нулевыми изоградами по x_{12} и y_{12}. При $y_{22} = \text{const}$ область между изоградами по x_{12}, y_{12} превращается в «конкурентную ловушку», поскольку, как видно из рис. 7.5, система, попав в эту область, стремится в ней остаться.

Исследуем теперь, как меняется расположение нулевых изоград в сечениях $y_{22} = \text{const}$ по мере роста y_{22}. Для этого будем изменять состояние системы вдоль прямой $x_{12} = \text{const}$, $y_{12} = \text{const}$ от y_{22} до $\tilde{y}_{22} = y_{22} + \delta$. Тогда согласно результатам, полученным в начале параграфа, θ_2 получает положительное приращение, определяемое с помощью **(7.4.17)**, при этом $\Delta x_0 < 0$, $\Delta x_2 > 0$.

При этом производительность труда и фондоотдача секторов изменятся следующим образом:

- $\Delta f_0 = \dfrac{\Delta x_0}{x_{10} + \beta_1 y_{12}} < 0$, т.е. фондоотдача материального сектора сократится;
- $\Delta f_2 = \dfrac{\Delta x_2}{x_{12} + \beta_1 y_{12}} > 0$, т.е. фондоотдача потребительского сектора возрастет;

- производительность труда материального сектора вырастет $(\Delta l_0 > 0)$, поскольку $\frac{x_0}{\theta_0} = B_0 \theta^{-\alpha_0} \left(x_{10} + \beta_1 y_{12}\right)^{\alpha_0}$ возрастает при росте θ_2 (убывании θ_0);
- производительность труда потребительского сектора сократится $(\Delta l_2 < 0)$, поскольку $\frac{x_2}{\theta_2} = B_2 \theta_2{}^{-\alpha_2} \left(x_{12} + \beta_1 y_{12}\right)^{\alpha_2}$ убывает при росте θ_2.

Умножим левую и правую части **(7.4.32)** на $\frac{(1-\alpha_0) l_0}{\alpha_0 f_0}$. Тогда уравнение нулевой изограды по x_{12} преобразуется к виду:

$$\frac{b_0 - \tilde{b}_2 \dfrac{\alpha_2 f_2}{\alpha_0 f_0}}{b_0 - \tilde{b}_2 \dfrac{(1-\alpha_2) l_2}{(1-\alpha_0) l_0}} = \frac{1 - a_0 + \tilde{a}_2 \dfrac{\alpha_2 f_2}{\alpha_0 f_0}}{1 - a_0 + \tilde{a}_2 \dfrac{(1-\alpha_2) l_2}{(1-\alpha_0) l_0}}. \qquad \textbf{(7.4.35)}$$

Поскольку $\frac{f_2}{f_0}$ растет, $\frac{l_2}{l_0}$ убывает, то правая часть **(7.4.33)** растет, а левая — убывает. Поэтому равенство **(7.4.32)**, имевшее место в точке (x_{12}, y_{12}, y_{22}), будет нарушено в точке $(x_{12}, y_{12}, y_{22} + \delta)$. Чтобы снова добиться равенства **(7.4.33)** в сечении $\tilde{y}_{22} = y_{22} + \delta = \text{const}$, необходимо все только что отслеженные изменения поменять на противоположные. С этой целью увеличим инвестиции в материальный сектор за счет сокращения инвестиций в потребительский сектор в таком направлении на плоскости $y_{22} + \delta = \text{const}$, что отношение $\frac{f_2}{f_0}$ уменьшится, а отношение $\frac{l_2}{l_0}$ увеличится. Тогда левая часть **(7.4.33)** увеличится, а правая — уменьшится, т.е. путем подбора приращений $\Delta x_{12} < 0$, $\Delta y_{12} < 0$ можно снова добиться равенства **(7.4.33)** в некоторой точке $\tilde{x}_{12} = x_{12} + \Delta x_{12}$, $\tilde{y}_{12} = y_{12} + \Delta y_{12}$.

Таким образом, при увеличении y_{22} нулевая изограда по x_{12} смещается влево-вниз, как это показано на рис. 7.6.

Выражение **(7.4.34)** для нулевой изограды по y_{12} схоже с выражением **(7.4.32)** для нулевой изограды по x_{12}: прежде всего знаменатели левых частей одинаковы и знаменатели правых частей одинаковы, в числителе левой части **(7.4.34)** появилось дополнительное слагаемое $\left[-\frac{1}{\beta_1}(b_{10}-b_{12})\right]$, а в числителе правой части — слагаемое $\left[-\frac{q_1^+}{\beta_1 q_0}\right]$. Поэтому при движении вдоль прямой $x_{12}=\text{const}$, $y_{12}=\text{const}$ в направлении роста y_{22} будут происходить аналогичные изменения в левых и правых частях **(7.4.34)**. Точно так же, как для нулевой изограды, будут происходить противоположные изменения при перетоке инвестиционных ресурсов из потребительского сектора в материальный. Следовательно, при увеличении y_{22} нулевая изограда по y_{12} смещается влево-вниз так же, как и нулевая изограда по x_{12}. Разумеется, величи́ны этих смещений для одной и другой изоград различны.

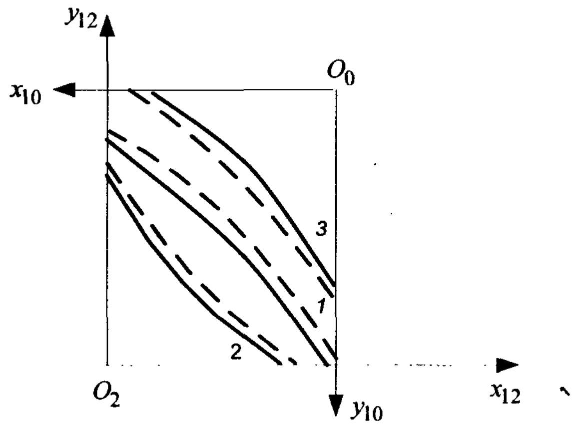

Рис. 7.6. Нулевые изограды в сечении $y_{22}+\delta=\text{const}$ [1]

Уравнение **(7.4.35)** нулевой изограды по y_{22} существенно отличается от выражений изоград по x_{12}, y_{12}, поскольку в первом в отличие от вторых отсутствует фондоотдача секторов, поэтому данное уравнение напрямую разрешается относительно отношения производительности труда секторов:

$$\frac{x_2\theta_0}{\theta_2 x_0}=b, \qquad \textbf{(7.4.36)}$$

[1] Пунктиром показаны нулевые изограды в сечении $y_{22}=\text{const}$.

где $b = \dfrac{\dfrac{q_0}{q_2^+}(1-a_0)(b_{20}-b_{22})+b_0}{\tilde{b}_2 - \dfrac{q_0}{q_2^+}\tilde{a}_2(b_{20}-b_{22})}$.

При движении вдоль прямой $x_{12} = \text{const}$, $y_{12} = \text{const}$ в направлении роста y_{22} отношение в левой части **(7.4.36)** будет убывать, поскольку это отношение пропорционально величине $\dfrac{(1-\theta_1-\theta_2)^{\alpha_0}}{\theta_2^{\alpha_2}}$, поэтому нулевая изограда по y_{22} при увеличении y_{22} будет смещаться в сторону бóльших значений x_{12}, y_{12}.

Итак, по мере роста y_{22} нулевые изограды по x_{12}, y_{12} смещаются в сторону *меньших значений* x_{12}, y_{12}, в то время как нулевая изограда по y_{22} смещается в *противоположную сторону*, т.е. область относительного равновесия *расширяется.*

На рис. 7.5, 7.6 не были показаны кривые пересечения границ допустимой области, определяемых условиями **(7.4.24)**, **(7.4.25)**, с плоскостями $y_{22} = \text{const}$, $y_{22} + \delta = \text{const}$. Эти кривые выделяют в прямоугольнике распределения ресурсов свою допустимую область, так что часть картины на рис. 7.5 или рис. 7.6 может оказаться вне этой области.

На рис. 7.7 показана допустимая область в сечении $y_{22} = 0$. Участок 1 ее границы имеет вид:

$$\gamma_2 \underline{x}_2 - \frac{q_1^+}{q_2^+} y_{12} = \frac{q_1^+}{q_2^+} \gamma_1 \underline{x}_1 .$$

На рис. 7.8 показана допустимая область в сечении $y_{22} = y_{22}^0 > 0$. Участки 1 и 2 ее границы задаются следующими уравнениями:

$$y_{12} = \frac{q_2}{q_1^+} \bar{z}_2 - \frac{q_2^+}{q_1^+} y_{22}^0,$$

$$\gamma_2 \bar{x}_2 = y_{22}^0 .$$

По мере увеличения y_{22}^0 эта часть границы смещается вниз.

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на то, что верхняя граница допустимой области, определяемая квотой $\bar{z}_2$, и ее нижняя граница, определяемая квотой $\bar{z}_0$, могут перекрываться, поэтому сечения этих границ плоскостью $y_{22} = \text{const}$ могут накладываться друг на друга. Кроме того, не следует забывать, что в некоторых подмножествах допустимой области прибыли либо материального, либо потребительского секторов отрицательны.

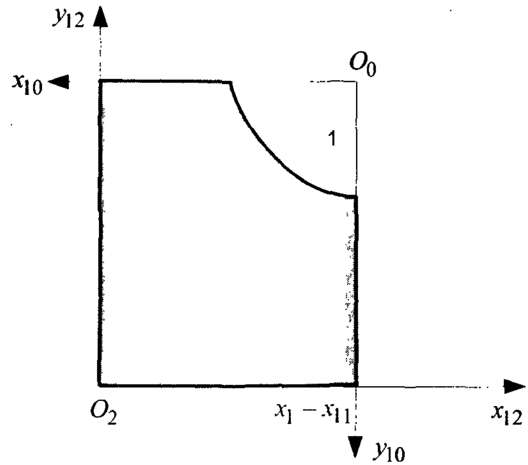

Рис. 7.7. ***Сечение допустимой области плоскостью*** $y_{22} = 0$

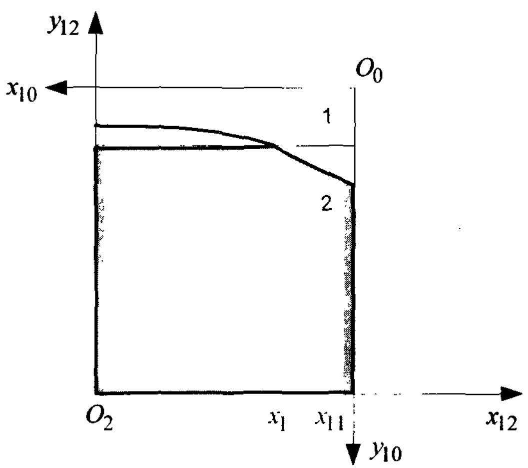

Рис. 7.8. ***Сечение допустимой области плоскостью*** $y_{22} = y_{22}^0 > 0$

Выводы

В стационарном режиме и при фиксации удельного выпуска фондосоздающего сектора *сбалансированное состояние национальной экономики* при конкуренции материального и потребительского секторов однозначно определяется следующими т р е м я показателями потребительского сектора:

1) удельными вложениями отечественных инвестиционных ресурсов x_{12};

2) удельными вложениями импортных инвестиционных ресурсов y_{12};

3) удельным импортом потребительских товаров y_{22}.

Последний показатель можно рассматривать как внешнеторговый ресурс: его увеличение на единицу приносит потребительскому сектору прибыль b_{20}, источником которой служит разница между внутренними и мировыми ценами. Соответствующие показатели материального сектора однозначно устанавливаются по значениям первых трех:

$$x_{10} = x_1 - x_{11} - x_{12}, \quad y_{10} = \gamma_1 x_1 - y_{12}, \quad y_{20} = \gamma_2 x_2 - y_{22}.$$

Показатели состояния x_{12}, y_{12}, y_{22} однозначно определяют *удельные выпуски секторов*:

$$x_0 = \beta_0 \theta_0^{1-\alpha_0} (x_{10} + \beta_1 y_{10})^{\alpha_0},$$

$$x_2 = \beta_2 \theta_2^{1-\alpha_2} (x_{12} + \beta_1 y_{12})^{\alpha_2}.$$

При этом доли секторов в распределении труда θ_0, θ_2 определяются из уравнений трудового и материального балансов:

$$\theta_0 + \theta_2 = 1 - \theta_1, \quad (1 - a_0) x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \frac{q_1^+}{q_0} y_{10} + \frac{q_2^+}{q_0} y_{20}.$$

В свою очередь, на основе показателей состояния и удельных выпусков секторов однозначно устанавливаются *удельные прибыли секторов*:

$$\pi_0 = b_0 x_0 + b_{20} y_{20} - p_1 x_{10} - b_{10} y_{10},$$

$$\pi_2 = b_2 x_2 + b_{22} y_{22} - p_1 y_{10} - b_{12} y_{12}.$$

Допустимая область возможных состояний конкурентной экономики определяется производственными возможностями фондосоздающего сектора и экспортно-импортными квотами:

$$x_{10} + x_{12} = x_1 - x_{11}, \quad y_{10} + y_{12} = \gamma_1 x_1,$$

$$\frac{q_1^+}{q_0} y_{10} + \frac{q_2^+}{q_0} y_{20} \le \bar{z}_0, \quad \frac{q_1^+}{q_0} y_{12} + \frac{q_2^+}{q_0} y_{22} \le \bar{z}_2.$$

В каждом допустимом состоянии имеется тенденция движения в направлении *градиента суммарной прибыли*:

$$\operatorname{grad} \pi = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_{12}}, \frac{\partial \pi}{\partial y_{12}}, \frac{\partial \pi}{\partial y_{22}} \right), \quad \pi = \pi_0 + \pi_2.$$

Эта тенденция превращается в изменение состояния экономической системы при внешнем воздействии на нее, в том числе при изменении налоговых и таможенных ставок, а также квот.

Допустимая область делится на три подобласти:

- подобласть *положительного неравновесия* ($\operatorname{grad} \pi > 0$);
- подобласть *отрицательного неравновесия* ($\operatorname{grad} \pi < 0$);
- подобласть *относительного равновесия* (компоненты градиента имеют разные знаки, на границе области одна из компонент градиента обращается в ноль).

Из областей положительного и отрицательного неравновесий имеется *тенденция движения в сторону области относительного равновесия.*

Внутри области относительного равновесия имеется тенденция движения *в направлении роста* y_{22}, вплоть до достижения верхней допустимой границы $\bar{y}_{22}$.

При фиксированном значении $y_{22} = y_{22}^0 > 0$ внутри области относительного равновесия выделяется область равновесия, попав в которую система стремится остаться в ней («конкурентная ловушка»). Границами этой области служат нулевые изограды по x_{12} и y_{12}.

7.5. Моделирование научно-технического прогресса

Научно-технический прогресс (НТП) проявляется в новых видах продукции, новых способах и средствах производства продукции и оказания услуг. Поскольку разработка и внедрение новых технологий — это длительные процессы, а за длительные промежутки времени зависимости между выпусками продукции и затратами ресурсов носят нелинейный характер, то для моделирования научно-технического прогресса на макроуровне наиболее пригодны малосекторные, главным образом, односекторные нелинейные модели.

В связи с большой степенью агрегирования продуктов в малосекторных моделях экономики отразить появление новых видов продукции (тем более, в деталях) представляется крайне затруднительным. Но учесть появление новых способов и средств производства продукции возможно с той степенью агрегированности, с которой позволяет это сделать рассматриваемая модель. Новые способы и средства производства характеризуются большей ресурсоотдачей и меньшей ресурсоемкостью, именно эти аспекты и отражают модели научно-технического прогресса.

Научно-технический прогресс может проявляться либо в эволюторной, постепенной форме, либо в форме массового перевооружения. В первом случае его можно отразить с помощью производственных функций с медленно «дрейфующими» коэффициентами. Во втором случае это процесс перехода от одного технологического уклада, характеризующегося определенными производственными функциями секторов, к другому технологическому укладу с другими производственными функциями.

Эволюторные модели научно-технического прогресса

В этом случае экономика рассматривается как одно неструктурированное целое и описывается производственной функцией с «дрейфующими» во времени коэффициентами. Впервые такой подход применил Тинберген, который считал, что медленное увеличение ресурсоотдачи в результате научно-технического прогресса можно отразить путем включения экспоненты в коэффициент нейтрального технического прогресса мультипликативной производственной функции:

$$X_t = A_0 e^{\lambda t} K_t^{\alpha_K} L_t^{\alpha_L}, \quad A(t) = e^{\lambda t},$$

где λ — мера НТП.

Затем этот подход был развит и дифференцирован:

1) трудоувеличивающий прогресс

$$X_t = F(K_t, L_t^*), \quad L_t^* = A_L(t) L_t,$$

т.е. столько единиц труда потребовалось бы, если бы не было НТП;

2) капиталоувеличивающий прогресс

$$X_t = F(K_t^*,\ L_t), \quad K_t^* = A_K(t) K_t,$$

т.е. столько единиц фондов потребовалось бы, если бы не было НТП;

3) ресурсоувеличивающий прогресс

$$X_t = F(K_t^*, L_t^*), \quad K_t^* = A_K(t)K_t, \quad L_t^* = A_L(t)L_t;$$

4) продуктоувеличивающий прогресс

$$X_t = A(t)F(K_t, L_t),$$

где $A(t)$, $A_L(t)$, $A_K(t)$ — некоторые растущие функции времени, как правило, экспоненты ($A(t) = e^{\lambda t}$).

Применение экспонент при изменении НТП целесообразно тогда, когда соответствующая функция $A(t)$ растет с примерно постоянным темпом прироста λ, тогда $A(t) = (1+\lambda)^t \approx e^{\lambda t}$ (последнее верно при малом значении λ). Далее будем считать, что это действительно так, т.е. прогресс эволюторен.

Технический прогресс называется ***нейтральным***, если он не меняет соотношения значений определенных параметров.

Различают нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу.

Прогресс *нейтрален по Хиксу*, если при заданной фондовооруженности предельная норма замены труда фондами постоянна при любом объеме выпуска

$$s_k = \frac{\frac{\partial X}{\partial L}}{\frac{\partial X}{\partial K}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L^*}}{\frac{\partial F}{\partial K^*}} \cdot \frac{e^{\lambda_L t}}{e^{\lambda_K t}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L^*}}{\frac{\partial F}{\partial K^*}} \quad \text{при} \quad \lambda_L = \lambda_K.$$

Поэтому нейтральность по Хиксу означает, что прогресс ресурсоувеличивающий с $\lambda_L = \lambda_K$ или (при линейной однородности функции $F(K, L)$), что прогресс продуктоувеличивающий.

Прогресс *нейтрален по Харроду*, если не меняется предельный продукт фондов:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

Поэтому нейтральность по Харроду означает, что прогресс трудоувеличивающий:

$$X = F(K, e^{\lambda_L t} L).$$

Прогресс *нейтрален по Солоу*, если не меняется предельный продукт труда:

$$\frac{\partial X}{\partial L}=\frac{\partial F}{\partial L}.$$

Поэтому нейтральность по Солоу означает, что прогресс капиталоувеличивающий:

$$X=F(e^{\lambda_K t}K,L).$$

Модель перевооружения трехсекторной экономики[1]

Постановочным образом рассмотрим модель перевооружения трехсекторной экономики. Под *перевооружением* будем понимать создание нового технологического уклада с новыми, более эффективными производственными функциями $X_i^*=F_i^*(K_i,L_i)$, $i=0,1,2$, в который постепенно, по мере его создания, будут «перекачиваться» все ресурсы из старого технологического уклада, заданного старыми производственными функциями $X_i=F_i(K_i,L_i)$, $F_i^*(K_i,L_i)>F_i(K_i,L_i)$, $i=0,1,2$.

Создание нового технологического уклада возможно в результате отдельного применения или сочетания следующих трех основных способов:

1) за счет собственных научно-технических и производственных возможностей (достаточно дешево, но долго, зато развивается собственный научно-технический потенциал, растут квалифицированные кадры);

2) путем приобретения за рубежом лицензий на производство оборудования, реализующего новые прогрессивные технологии (гораздо дороже, зато быстрее; свой научно-технический и кадровый потенциал также растет);

3) путем прямого монтажа и последующего использования закупленного на мировом рынке готового оборудования (дорого, зато быстро, но при отсутствии развития собственного научно-технического и кадрового потенциала).

Нам представляется, что главной составляющей перевооружения должен быть первый способ, а второй и третий — дополняющими. Самый простой вид имеет модель, в которой присутствует только первый (из упомянутых) способ.

При построении такой модели будем исходить из следующих упрощающих предположений.

1. Старый технологический уклад исчерпал себя, экономика находится в стационарном состоянии

---

[1] Модель разработана автором и впервые опубликована в учебнике «Математическая экономика». — 2-е изд. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

$$x_i = \theta_i B_i \left(\frac{s_i x_1}{\theta_i} \right)^{\alpha_i}, \quad B_i = \frac{A_i}{\lambda_i^{\alpha_i}}, \qquad i = 0, 2,$$

$$x_1 = B_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \quad B_1 = \left(\frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

2. Создание нового технологического уклада происходит с лагом τ.

3. Поскольку создание нового уклада осуществляется за счет старого, т.е. путем использования фиксированных мощностей фондосоздающего сектора x_1 и перелива инвестиционных ресурсов из материального и потребительского секторов в новые секторы, то

$$\underline{s_0} + s_1 + \underline{s_2} + \tilde{s}_0 + \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 = 1,$$

где $\underline{s_2}$ — доля инвестиционных ресурсов, направляемых в старый потребительский сектор для обеспечения удельного выпуска предметов потребления на минимально допустимом уровне $\underline{c}$:

$$\underline{c} = B_2 \left(\frac{\underline{s_2} x_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2};$$

$\underline{s_0}$ — доля инвестиционных ресурсов, направляемых в старый материальный сектор, для обеспечения материальными ресурсами старых фондосоздающего и потребительского секторов:

$$(1 - a_0)\underline{x_0} = a_1 x_1 + a_2 \underline{c}, \quad \underline{x_0} = B_0 \left(\frac{\underline{s_0} x_1}{\theta_0} \right)^{\alpha_0};$$

$\tilde{s}_i (i = 0, 1, 2)$ — доли инвестиционных ресурсов, направляемых в создание мощностей нового технологического уклада.

4. Новый технологический уклад отличается от старого только по производственным функциям $F_i^*(K_i, L_i) > F_i(K_i, L_i)$, $i = 0, 1, 2$, в то время как коэффициенты износа и прямых материальных затрат остались прежними.

В целом весь процесс перевооружения распадается на т р и этапа:

1) накопление;

2) отдача накоплений;

3) ускоренное вытеснение старого технологического уклада.

На *этапе накопления* при $0 \le t \le \tau$ действует только старый технологический уклад:

$$x_0(t) = \underline{x_0}, \quad x_1(t) = x_1, \quad x_2(t) = \underline{c}.$$

Накопление мощностей нового технологического уклада осуществляется за счет сокращения долей материального и потребительского секторов в ресурсах:

$$\tilde{s}_0 + \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 = s_0 - \underline{s_0} + s_2 - \underline{s_2}.$$

На *этапе накопления* при $\tau < t \le 2\tau$ мощности нового технологического уклада начинают давать отдачу, однако новый технологический способ еще не в состоянии обеспечить общество предметами потребления хотя бы на минимальном уровне, поэтому старый и новый уклады сосуществуют при постепенном переливе трудовых ресурсов из старого уклада в новый.

При сосуществовании двух способов показатели, характеризующие старый уклад будем отмечать значком «∧», а новый — значком «*». Поскольку на этом этапе параллельно действуют старые и новые мощности, то распределение инвестиционных ресурсов также осуществляется параллельно: старые ресурсы — в старый способ с долями s_0, s_1, s_2, $s_0 + s_1 + s_2 = 1$; новые ресурсы — в новый способ с долями $\overset{*}{s}_0, \overset{*}{s}_1, \overset{*}{s}_2$, $\overset{*}{s}_0 + \overset{*}{s}_1 + \overset{*}{s}_2 = 1$. При этом трудовые ресурсы распределяются как на старый, так и на новый уклады, т.е. $\sum_{i=0}^{2}\left[\hat{\theta}_i(t) + \theta_i^*(t)\right] = 1$.

Примем, что перелив трудовых ресурсов осуществляется при постоянстве фондовооруженности (каждого сектора в каждом укладе)

$$\left.\begin{aligned} \hat{k}_i(t) &= \hat{k}_i = \hat{k}_i(\tau), && i = 0, 1, 2, \\ \overset{*}{k}_i(t) &= \overset{*}{k}_i = \text{const}, && i = 0, 1, 2, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.5.1)}$$

при этом внутри каждого способа лаг отдачи капиталовложений равен нулю.

Начиная с $t = \tau$ в модели осуществляется в рамках нового технологического уклада нормальный воспроизводственный процесс, который в непрерывном времени и в отсутствие лага капиталовложений описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\overset{*}{K}_i}{dt} = -\mu_i \overset{*}{K}_i + \tilde{s}_i X_1(t - \tau) + \overset{*}{s}_i \overset{*}{X}_1, \quad \overset{*}{K}_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \qquad \textbf{(7.5.2)}$$

Поскольку $k_i^* = \dfrac{K_i^*}{L_i^*}$, $L_i^*(t) = \theta_i^*(t)L(t)$, $L(t) = L(0)e^{\nu t}$, то при сделанных предположениях **(7.5.1)** уравнения **(7.5.2)** примут следующий вид:

$$\frac{d\theta_i^*}{dt} = -\lambda_i\theta_i^* + \frac{\tilde{s}_i x_1 e^{-\nu\tau} + s_i^* x_1^*}{k_i^*}, \quad \theta_i^*(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad \textbf{(7.5.3)}$$

Рассмотрим уравнение для доли труда нового фондосоздающего сектора:

$$\frac{d\theta_1^*}{dt} = (-\lambda_1 + \frac{s_1^* A_1^* \left(k_1^*\right)^{\alpha_1^*}}{k_1^*})\theta_1^* + \frac{\tilde{s}_1 x_1 e^{-\nu\tau}}{k_1^*}, \quad \theta_1^*(0) = 0.$$

Выберем фиксированную фондовооруженность фондосоздающего сектора на уровне стационарного значения

$$k_1^* = \left(\frac{s_1^* A_1^*}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

Тогда θ_1^* будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d\theta_1^*}{dt} = \frac{s_1^* x_1 e^{-\nu\tau}}{k_1^*}, \quad \theta_1^*(0) = 0,$$

которое имеет следующее решение

$$\theta_1^*(t) = \frac{\tilde{s}_1 x_1 e^{-\nu\tau}}{k_1^*} t.$$

Теперь однозначно определяются и решения остальных двух уравнений (при фиксированных $\tilde{s}_i$, $s_i^*, i = 0, 1, 2$):

$$\theta_i^*(t) = e^{-\lambda_i t}\int_0^t e^{\lambda_i u}(\beta_i + \gamma_i u)du, \quad i = 0, 2,$$

где $\beta_i = \dfrac{\tilde{s}_i x_1 e^{-\nu\tau}}{k_i^*}$, $\gamma_i = A_1^* \dfrac{s_i^* \tilde{s}_1 x_1 e^{-\nu\tau}}{k_i^*(k_1^*)^{1-\alpha_1^*}}$.

Выберем такие траектории $s_0^*(t)$, $s_2^*(t)$, что

$$s_0^*(t) + s_2^*(t) = 1 - s_1^*,$$

$$(1-a_0)\theta_0^*(t)A_0^*(k_0^*)^{\alpha_0^*}=a_1\theta_1^*(t)A_1^*(k_1^*)^{\alpha_1^*}+a_2\theta_2^*(t)A_2^*\left(k_2^*\right)^{\alpha_2^*}.$$

Это можно осуществить с помощью конечно-разностной рекуррентной процедуры с шагом Δt, а затем при $\Delta t \to 0$ получить окончательные значения $\overset{*}{s}_0(t)$, $\overset{*}{s}_2(t)$ и $\theta_0^*(t)$, $\theta_2^*(t)$.

Зная в каждый момент времени t точные значения $\theta_i^*(t)$, $i=0,1,2$, определяем долю труда, оставшуюся на старый технологический уклад:

$$1-\sum_{i=0}^{2}\theta_i^*(t),\quad \tau<t\le T$$

(при $\sum\limits_{i=0}^{2}\theta_i^*(T)=1$ переход к новому укладу закончен). Разделим эту остаточную долю между старыми секторами в тех же пропорциях, которые были в конце первого этапа:

$$\hat{\theta}_i(t)=\theta_i\left[1-\sum_{i=0}^{2}\theta_i^*(t)\right],\quad \hat{\theta}_i(\tau)=\theta_i,\quad \theta_i^*(\tau)=0,\quad i=0,1,2.$$

Тогда материальный баланс для старых секторов будет выполнен, поскольку он имел место при $t=\tau$:

$$\left[1-\sum_{i=0}^{2}\theta_i^*(t)\right]\left[(1-a_0)\theta_0A_0\hat{k}_0^{\alpha_0}-a_1\theta_1A_1\hat{k}^{\alpha_1}-a_2\theta_2A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}\right]=0.$$

Осталось только проверить удовлетворение минимальных потребностей в производстве предметов потребления

$$\hat{\theta}_2(t)A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}+\theta_2^*(t)A_2^*\left(k_2^*\right)^{\alpha_2^*}\ge \underline{c}. \qquad \textbf{(7.5.4)}$$

При $t=\tau$ это условие выполняется:

$$\theta_2A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}=\underline{c}.$$

Выберем

$$k_2^*=\hat{k}_2=\left(\frac{\underline{c}}{\theta_2A_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

тогда условие (7.5.4) примет вид:

$$\theta_2\left[1-\sum_{i=0}^{2}\theta_i^*(t)\right]A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}+\theta_2^*(t)A_2^*\hat{k}_2^{\alpha_2^*}\geq \underline{c}. \qquad (7.5.5)$$

Достаточным условием для выполнения (7.5.5) служит неравенство

$$\theta_2\left[1-\sum_{i=0}^{2}\theta_i^*(t)\right]+\theta_2^*(t)\geq\theta_2,$$

которое эквивалентно

$$\theta_2^*(t)\geq\theta_2.$$

Таким образом, при $\theta_2^*(t)\geq\theta_2$ неравенство (7.5.5) выполнено, поэтому надо найти условия, для которых неравенство (7.5.5) выполняется при $\tau<t<\hat{t}$, где $\theta_2^*(\hat{t})=\theta_2$.

Рассмотрим левую часть (7.5.5) как функцию времени

$$g(t)=\theta_2\left[1-\sum_{i=0}^{2}\theta_i^*(t)\right]A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}+\theta_2^*(t)A_2^*\hat{k}_2^{\alpha_2^*},\quad \tau<t<\hat{t}.$$

Имеем

$$\frac{dg}{dt}=-\theta_2\sum_{i=0}^{2}\frac{d\theta_i^*}{dt}A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}+\frac{d\theta_2^*}{dt}A_2^*\hat{k}_2^{\alpha_2^*}.$$

Поэтому для выполнения (7.5.5) необходимо $\frac{dg}{dt}(\tau)>0$ (напомним, что $\theta_i^*(\tau)=0$, $i=0,1,2$, $x_1^*(\tau)=0$), т.е. воспользуемся приближением $\frac{d\theta_i^*}{dt}\approx\frac{\tilde{s}_i x_1 e^{-\nu\tau}}{k_i^*}$:

$$\frac{A_2^*\left(k_2^*\right)^{\alpha_2^*}}{A_2\hat{k}_2^{\alpha_2}}>\theta_2\left[1+\frac{\tilde{s}_0 k_2^*}{\tilde{s}_2 k_0^*}+\frac{\tilde{s}_1 k_2^*}{\tilde{s}_2 k_1^*}\right]. \qquad (7.5.6)$$

Условие (7.5.6) является ключевым с точки зрения целесообразности проведения перевооружения.

Момент окончания перевооружения T можно найти приближенно, если воспользоваться тем, что

$$\theta_i^*(T)\approx\frac{\beta_i+\gamma_i T}{\lambda},\quad i=0,2.$$

Тогда

$$1 = \sum_{i=0}^{2} \theta_i^*(T) \approx \frac{\beta_0 + \beta_2}{\lambda} + \left(\frac{\gamma_0 + \gamma_2}{\lambda} + \frac{\tilde{s}_1 x_1 e^{-\nu\tau}}{k_1^*} \right) T,$$

поэтому

$$T \approx \frac{\lambda - x_1 e^{-\nu\tau} \left(\frac{\tilde{s}_0}{k_0^*} + \frac{\tilde{s}_2}{k_2^*} \right)}{\frac{\tilde{s}_1 x_1 e^{-\nu\tau}}{k_1^*} - \left[\lambda + A_1^* (k_1^*)^{\alpha_1} \left(\frac{s_0^*}{k_0^*} + \frac{s_2^*}{k_2^*} \right) \right]}. \qquad (7.5.7)$$

Если $T < 2\tau$, то переход к новому технологическому укладу окончен уже на этом этапе, при $T > 2\tau$ потребуется завершающий этап.

Вопросы и задания

1. Найдите условия возможности и целесообразности внешней торговли при комбинации первого варианта (перелив ресурсов в материальный сектор из потребительского) и второго варианта (перелив ресурсов в материальный сектор из фондосоздающего).
2. Что такое детерминанты внешней торговли?
3. Как вы понимаете нейтральность прогресса по Харроду, Хиксу и Солоу?
4. Каково ключевое условие целесообразности массового перевооружения народного хозяйства? В чем его содержательный смысл?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1
Справочные сведения о линейных дифференциальных уравнениях и системах линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = x, \qquad \textbf{(П.1.1)}$$

где $y^{(j)} = \dfrac{d^j y}{dt^j}$,

$x = x(t)$ — некоторая известная функция времени (правая часть уравнения).

Если коэффициенты уравнения a_j не зависят от времени, то уравнение **(П.1.1)** называется *уравнением с постоянными коэффициентами.* Линейное уравнение называется *однородным*, если $x = 0$, и *неоднородным* в противном случае.

Система решений $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ однородного линейного уравнения называется *фундаментальной*, если эти функции *линейно независимы* на рассматриваемом временно́м интервале.

Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями уравнения **(П.1.1)** с правыми частями $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то $y_1(t) + y_2(t)$ является решением этого уравнения с правой частью $x_1(t) + x_2(t)$. Поэтому для получения общего решения неоднородного уравнения надо к общему решению однородного уравнения добавить любое частное решение неоднородного.

Решение однородного уравнения

Однородное уравнение имеет вид:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = 0. \qquad \textbf{(П.1.2)}$$

Прямой проверкой убеждаемся, что $y(t) = e^{\lambda t}$ является решением однородного уравнения **(П.1.2)**:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j e^{\lambda t} = 0,$$

если (ведь $e^{\lambda t} \neq 0$) λ удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0. \qquad \textbf{(П.1.3)}$$

Уравнение **(П.1.3)** называется *характеристическим*. Поскольку любой полином n-й степени имеет n корней, то характеристическое уравнение имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и каждому корню λ_j отвечает решение $e^{\lambda_j t}$.

Если корень λ_j имеет кратность k_j, то наряду с $e^{\lambda_j t}$ решениями также являются $te^{\lambda_j t}, ..., t^{k_j - 1} e^{\lambda_j t}$ (доказывается простой проверкой). Решения, отвечающие кратному корню, линейно независимы.

Если корень λ_1 является комплексным (перенумеруем корни так, чтобы этот корень стал первым), то обязательно есть корень, сопряженный с ним (перенумеруем корни так, чтобы сопряженный корень стал вторым):

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i\omega.$$

Следовательно, решения являются комплексными

$$e^{(\alpha + i\omega)t}, \quad e^{(\alpha - i\omega)t},$$

поэтому заменяем их на действительные

$$\frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\omega)t} + e^{(\alpha-i\omega)t}\right) = e^{\alpha t} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = e^{\alpha t} \cos\omega t,$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega)t}\right) = e^{\alpha t} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = e^{\alpha t} \sin\omega t.$$

Эти два решения линейно независимы, поскольку независимы $\cos \omega t$, $\sin \omega t$.

При разных λ_i данные решения линейно независимы, поэтому они образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения. Итак, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{n_1} e^{\alpha_j t} (c_{2j-1} \cos\omega_j t + c_{2j} \sin\omega_j t) + \sum_{j=2n_1+1}^{n} c_j e^{\lambda_i t} \qquad \textbf{(П.1.4)}$$

(чтобы не загромождать выражение, написали его в предположении, что кратных корней нет, а первые $2n_1$ корней — комплексные взаимно сопряженные).

Общее и конкретное решение неоднородного уравнения

Добавив к общему решению однородного уравнения $y_0(t)$ любое частное решение неоднородного уравнения $y_1(t)$, получаем общее решение неоднородного уравнения $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$. Если заданы начальные условия $y^{(j)}(0) = y_j^0, \ j = 0, 1, ..., n-1$, то однозначно определяются константы общего решения, тем самым находится единственное конкретное решение для данных начальных условий.

Частное решение определяется методом вариации постоянных, методом Коши или операторным методом.

Операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операторный метод основан на использовании преобразований Лапласа входящих в уравнение функций времени.

Преобразованием Лапласа некоторой функции $f(t)$ называется следующий интеграл от функции $f(t)$, зависящий, вообще говоря, от комплексного параметра s:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \qquad \textbf{(П.1.5)}$$

где $F(s)$ — образ функции (прообраза) $f(t)$.

Преобразование Лапласа осуществляет отображение временнóго пространства (пространства функций времени) в пространство образов или частотное пространство.

Для обратного преобразования из частотного пространства во временнóе справедливо выражение

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\omega}^{\delta+i\omega} e^{st}F(s)ds, \qquad \textbf{(П.1.6)}$$

где $s = \delta + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа;
δ — параметр затухания;
ω — круговая частота, $i = \sqrt{-1}$.

Преобразование функции и ее производной связаны следующим образом (интегрируем по частям):

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = -f(0) + sF(s),$$

тем самым

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0). \qquad \textbf{(П.1.7)}$$

Если $f(0) = 0$, то операции дифференцирования по времени во временнóм пространстве соответствует операция умножения на s в пространстве образов.

Применив преобразование Лапласа к уравнению **(П.1.1)** с постоянными коэффициентами и при нулевых начальных условиях, получим следующее алгебраическое уравнение:

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right) Y(s) = X(s), \qquad \textbf{(П.1.8)}$$

где $Y(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} y(t)dt, \quad X(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} x(t)dt.$

Из **(П.1.8)** можно найти образ решения

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j s^j} \qquad \textbf{(П.1.9)}$$

как частное от деления образа правой части на характеристический многочлен уравнения, в который вместо λ подставлен параметр преобразования s.

Зная образ решения $Y(s)$, можно найти само решение $y(t)$ либо непосредственно по формуле обратного преобразования **(П.1.6)**, либо по таблице преобразований Лапласа (в гл. 1 приведена табл. 1.1 преобразований Лапласа от некоторых наиболее употребляемых в макроэкономических исследованиях функций).

Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами называется следующая система:

$$\frac{dy_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = x_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad \textbf{(П.1.10)}$$

Система линейных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в матричном виде:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + x, \qquad \textbf{(П.1.11)}$$

где $(n \times 1)\; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбцы неизвестных функций (времени) и правых частей (известных функций времени);

$$(n\times 1)\ \frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dy_1}{dt}\\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dt}\end{pmatrix}$$ — вектор-столбец производных;

$(n \times n)A$ — матрицы коэффициентов при неизвестных функциях.

Если $x = 0$, то система называется *нормальной однородной*:

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \qquad \textbf{(П.1.12)}$$

Решением однородной системы может быть вектор

$$y = e^{\lambda t} l = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix},$$

где l_j — постоянные.

В самом деле, после подстановки получаем:

$$\lambda e^{\lambda t} l = A e^{\lambda t} l,$$

поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$, то $e^{\lambda t} l$ может быть решением уравнения **(П.1.11)**, если λ — собственное число матрицы A, а l — отвечающий ему собственный вектор (см. гл. 1):

$$Al = \lambda l. \qquad \textbf{(П.1.13)}$$

Собственный вектор является ненулевым решением линейного однородного алгебраического уравнения

$$(A - \lambda E)l = 0,$$

которое может существовать лишь тогда, когда равен нулю определитель последней системы

$$| A - \lambda E | = 0. \qquad \textbf{(П.1.14)}$$

Уравнение **(П.1.14)** называется *характеристическим уравнением* системы. Оно имеет n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, поэтому однородная система имеет n линейно независимых решений

$$e^{\lambda_i t} l_i,$$

где l_i — нормированный собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_i матрицы A, если все λ_i разные и действительные.

Если же есть комплексные (взаимно сопряженные) или кратные корни, то решения получают точно такую же форму, как и в случае линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{n_1} e^{\lambda_j t} \left(c_{2j-1} \cos \omega_j t + c_{2j} \sin \omega_j t \right) l_j + \sum_{j=2n_1+1}^{n} c_j l^{\lambda_j t}, \quad \textbf{(П.1.15)}$$

где n_1 — число пар взаимно сопряженных комплексных корней;
$(n - 2n_1)$ — число действительных корней (для простоты считаем, что кратных корней нет).

Общее решение неоднородной системы уравнений **(П.1.10)** снова получаем как сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Конкретное решение системы **(П.1.10)** получается путем определения констант c_1, c_2, ..., c_3 с помощью начальных условий $y_j(0) = y_j^0$.

Точно так же, как и для линейного уравнения n-го порядка, к решению системы **(П.1.10)**, **(П.1.11)** можно применить операторный метод, если заданы нулевые начальные условия $y_j(0) = 0$. Действительно, применяя преобразование Лапласа к обеим частям равенства **(П.1.11)**, получаем

$$sY(s) = AY(s) + X(s),$$

откуда

$$Y(s) = (sE - A)^{-1} X(s),$$

поэтому осталось по образам $Y_1(s)$, ..., $Y_n(s)$ восстановить прообразы $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$.

Приложение 2
Исследование выражений, определяющих поведение трехсекторной экономики

Диинамика сбалаисированных состояний по труду и матерналам

Исследуется вся картина сбалансированного изменения состояний трехсекторной экономики по труду и материалам при фиксированном распределении инвестиционных товаров (s_0, s_1, s_2), $s_i > 0$, $s_0 + s_1 + s_2 = 1$. Таким образом, любое состояние из рассматриваемого множества удовлетворяет всем трем натуральным балансам, но один баланс рассматривается в статике, а два — в динамике.

Эти состояния определяются двумя уравнениями трудового и материального балансов:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \qquad \theta_i \geq 0, \\ &(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.1)}$$

поэтому из трех параметров распределения труда θ_0, θ_1, θ_2 свободно может меняться только один (далее примем за свободную переменную θ_2).

Если производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа, то удельные выпуски секторов примут вид:

$$x_0 = B_0 \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0}, \quad x_1 = B_1 \theta_1, \quad x_2 = B_2 \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2}, \qquad \textbf{(П.2.2)}$$

где $B_0 = A_0 A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} \lambda_0^{-\alpha_0} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1 \alpha_0}{1-\alpha_1}} s_0^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_1 \alpha_0}{1-\alpha_1}}$, $\quad B_1 = A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \lambda_1^{-\frac{1}{1-\alpha_1}} s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}$;

$$B_2 = A_2 A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \lambda_2^{-\alpha_2} \lambda_1^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{1-\alpha_1}} s_2^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{1-\alpha_1}}.$$

Из соотношений **(П.2.2)** находим дифференциалы удельных выпусков:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = x_0 \left[(1-\alpha_0) \frac{d\theta_0}{\theta_0} + \alpha_0 \frac{d\theta_1}{\theta_1} \right], \\ &d\, dx_1 = x_1 \frac{d\theta_1}{\theta_1}, \\ &dx_2 = x_2 \left[(1-\alpha_2) \frac{d\theta_2}{\theta_2} + \alpha_2 \frac{d\theta_1}{\theta_1} \right]. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.3)}$$

В дифференциалах уравнения **(П.2.1)** запишутся в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &d\theta_0 + d\theta_1 + d\theta_2 = 0, \\ &(1-a_0)dx_0 = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.4)}$$

Подставляя выражения **(П.2.3)** во второе уравнение системы **(П.2.4)**, получим:

$$(1-\alpha_0)x_0\left[(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}+\alpha_0\frac{d\theta_1}{\theta_1}\right]=a_1x_1\frac{d\theta_1}{\theta_1}+a_2x_2\left[(1-\alpha_2)\frac{d\theta_2}{\theta_2}+\alpha_2\frac{d\theta_1}{\theta_1}\right].$$

Последнее равенство после деления обеих его частей на $(1-a_0)x_0$ и приведения подобных членов принимает вид:

$$(1-\alpha_0)\frac{d\theta_0}{\theta_0}+(\alpha_0-\delta_1-\alpha_2\delta_2)\frac{d\theta_1}{\theta_1}=(1-\alpha_2)\delta_2\frac{d\theta_2}{\theta_2},$$

где $\delta_i = \dfrac{a_i x_i}{(1-a_0)x_0}$ — доля i-го сектора ($i = 1,\ 2$) в производственном потреблении товарной продукции материального сектора ($\delta_1 + \delta_2 = 1$).

Таким образом, система **(П.2.4)** приобрела следующую форму:

$$\begin{cases} \theta_0\dfrac{d\theta_0}{\theta_0}+\theta_1\dfrac{d\theta_1}{\theta_1}=-\theta_2\dfrac{d\theta_2}{\theta_2}, \\ \dfrac{d\theta_0}{\theta_0}-(1-\Delta)\dfrac{d\theta_1}{\theta_1}=\Delta\dfrac{d\theta_2}{\theta_2}, \end{cases} \qquad \textbf{(П.2.5)}$$

где $\Delta=\dfrac{1-\alpha_2}{1-\alpha_0}\delta_2$ — скорректированная доля потребительского сектора в использовании товарной продукции материального сектора.

Далее примем, что потребительский сектор имеет технологический уровень не меньше, чем материальный, т.е. $\alpha_2 \ge \alpha_0$, поэтому

$$\Delta \le \delta_2 \le 1.$$

Уравнения **(П.2.5)** имеют следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\theta_0}{\theta_0}=\frac{\Delta-\theta_2-\theta_0\Delta}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}=\frac{g_0}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}, \\ &\frac{d\theta_1}{\theta_1}=-\frac{\theta_2+\theta_0\Delta}{1-\theta_2-\theta_0\Delta}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}=-\frac{g_1}{g_2}\cdot\frac{d\theta_2}{\theta_2}, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.6)}$$

где $g_0=\Delta-\theta_2-\theta_0\Delta,\quad g_1=\theta_2+\theta_0\Delta,\quad g_2=1-\theta_2-\theta_0\Delta.$

Поскольку параметры распределения труда θ_0, θ_1, θ_2 связаны двумя соотношениями **(П.2.1)**, то переменные θ_0, θ_1 являются функциями свободной переменной θ_2 ($\theta_0 = \theta_0(\theta_2)$, $\theta_1 = \theta_1(\theta_2)$), поэтому и функции g_0, g_1, g_2 в решении **(П.2.6)** также являются функциями θ_2.

Свободная переменная θ_2 изменяется в диапазоне

$$0 \le \theta_2 \le 1,$$

где $\theta_2 = 0$ характеризует состояние экономики как «производство для производства» (производство предметов потребления отсутствует), а $\theta_2 = 1$ соответствует $\theta_1 = 0$, что означает полное отсутствие фондосоздающего производства, при этом $\theta_0 = 0$, $x_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, т.е. это ситуация отсутствия какого-либо производства вообще.

Характер изменений θ_0, θ_1 на всем диапазоне изменения свободной переменной θ_2 определяется знаками функций $g_0(\theta_2)$, $g_1(\theta_2)$, $g_2(\theta_2)$. Поскольку

$$g_1(\theta_2) = \theta_1(\theta_2) + \theta_0(\theta_2)\Delta(\theta_2) \ge 0,$$

$$g_2(\theta_2) = 1 - \theta_2 - \theta_0(\theta_2)\Delta(\theta_2) \ge 1 - \theta_2 - \theta_0(\theta_2) = \theta_1(\theta_2) \ge 0,$$

то $d\theta_1$ всегда имеет противоположный знак по отношению к $d\theta_2$.

Поскольку $g_0(0) = 0$, $g_0'(0) = +\infty$, $g_0(1) = -(1 - \Delta) < 0$, но $g_0'(1)$ может иметь как положительный, так и отрицательный знак, поэтому имеется два варианта поведения функции $g_0(\theta_2)$ (рис. П.2.1, П.2.2).

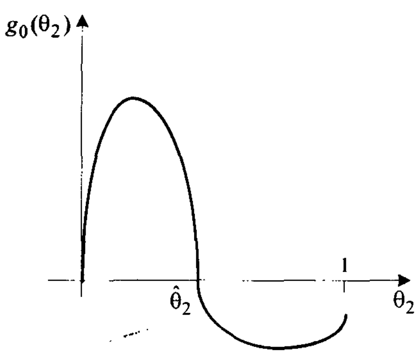

Рис. П.2.1

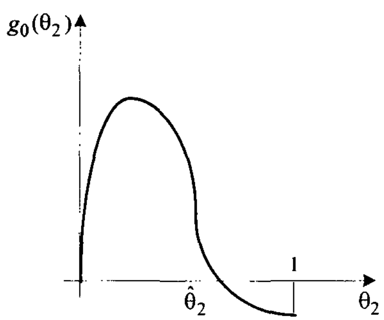

Рис. П.2.2

При $g_0'(1) > 0$ и $g_0'(1) < 0$ функция $g_0(\theta_2)$ в некоторой точке $\hat{\theta}_2$ обращается в нуль, т.е. это точка перемены знака функции с положительного на отрицательный. В точке $\hat{\theta}_2$ выполняется условие ($\Delta = \Delta(\hat{\theta}_2)$, $\theta_0 = \theta_0(\hat{\theta}_2)$)

$$\hat{\theta}_2 = \Delta(1 - \theta_0),$$

т.е. после выделения материальному сектору доли труда $\theta_0 = \theta_0(\hat{\theta}_2)$ оставшаяся доля $1 - \theta_0$ распределяется между фондосоздающим и потребительским секторами таким образом, что доля потребительского сектора равна его скорректированной доле Δ в распределении товарной продукции материального сектора.

Все это дает основание считать точку $\hat{\theta}_2$ границей между трудонедостаточной и трудоизбыточной областями потребительского сектора: при $\theta_2 < \hat{\theta}_2$ ($\theta_2 < \Delta(1 - \theta_0)$) потребительский сектор трудонедостаточен, а при $\theta_2 < \hat{\theta}_2$ ($\theta_2 > \Delta(1 - \theta_0)$) — трудоизбыточен.

Таким образом, если потребительский сектор трудонедостаточен ($\theta_2 < \hat{\theta}_2$, $g_0(\theta_2) > 0$), то согласно **(П.2.6)** при $d\theta_2 > 0$ происходит перелив труда из фондосоздающего в материальный и потребительский секторы; если же трудодостаточен, то при $d\theta_2 > 0$ донорами потребительского сектора становятся и материальный, и фондосоздающий секторы.

Подставив решение **(П.2.6)** в соотношения **(П.2.3)**, получим

$$\left.\begin{aligned} dx_0 &= \frac{u_0 x_0}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \qquad u_0 = g_0 - \alpha_0 \Delta, \\ dx_1 &= -\frac{g_1 x_1}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \\ dx_2 &= \frac{u_2 x_2}{g_2} \cdot \frac{d\theta_2}{\theta_2}, \qquad u_2 = g_2 - \alpha_2. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.7)}$$

Динамика сбалансированных состояний по инвестиционным товарам и материалам

Исследуется вся картина сбалансированного изменения состояний трехсекторной экономики по инвестиционным товарам и материалам при фиксированном распределении труда θ_0, θ_1, θ_2, $\theta_i > 0$, $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$. Таким образом, любое состояние из рассматриваемого множества удовлетворяет всем трем натуральным балансам, но один баланс рассматривается в статике, а два — в динамике. Эти состояния определяются двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &s_0+s_1+s_2=1, \quad s_i \geq 0, \\ &(1-a_0)x_0=a_1x_1+a_2x_2 \ , \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.8)}$$

поэтому из трех параметров s_0, s_1, s_2 распределения инвестиционных ресурсов может свободно меняться только один (далее примем за свободную переменную s_2).

Если производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа, то удельные выпуски секторов будут иметь вид:

$$x_0=B_0s_0^{\alpha_0}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1}}, \quad x_1=B_1s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \quad x_2=B_2s_2^{\alpha_2}s_1^{\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}, \qquad \textbf{(П.2.9)}$$

где $B_0=A_0A_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}\lambda_0^{-\alpha_0}\lambda_1^{-\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_0}}\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0}$, $B_1=A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\lambda_1^{-\frac{1}{1-\alpha_1}}\theta_1$,

$B_2=A_2A_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}\lambda_2^{-\alpha_2}\lambda_1^{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}}\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2}$.

Из соотношений **(П.2.9)** находим дифференциалы удельных выпусков:

$$\left.\begin{aligned} dx_0&=x_0\left[\alpha_0\frac{ds_0}{s_0}+\frac{\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right], \\ dx_1&=x_1\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}, \\ dx_2&=x_2\left[\alpha_2\frac{ds_2}{s_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.10)}$$

В дифференциалах уравнения **(П.2.8)** запишутся в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &ds_0+ds_1+ds_2=0, \\ &(1-a_0)dx_0=a_1\,dx_1+a_2\,dx_2. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.2.11)}$$

Подставляя выражения **(П.2.10)** во второе уравнение системы **(П.2.11)**, получим:

$$(1-a_0)x_0\left[\alpha_0\frac{ds_0}{s_0}+\frac{\alpha_1\alpha_0}{(1-\alpha_1)}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right]=a_1x_1\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{ds_1}{s_1}+a_2x_2\left[\alpha_2\frac{ds_2}{s_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(1-\alpha_1)}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\right].$$

Последнее равенство после деления обеих его частей на $(1-a_0)x_0$ и приведения подобных членов принимает вид:

$$\alpha_0\frac{ds_0}{s_0}+\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}(\alpha_2\delta_2-\alpha_0-\delta_1)\frac{ds_1}{s_1}=\alpha_2\delta_2\frac{ds_2}{s_2}.$$

Таким образом, система **(П.2.11)** приобрела следующую окончательную форму:

$$\left.\begin{aligned}&s_0\frac{ds_0}{s_0}+s_1\frac{ds_1}{s_1}=-s_2\frac{ds_2}{s_2},\\&\alpha_0\frac{ds_0}{s_0}-\frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)}(\alpha_0-\delta_1-\alpha_2\delta_2)\frac{ds_1}{s_1}=\alpha_2\delta_2\frac{ds_2}{s_2}.\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(П.2.12)}$$

Уравнения **(П.2.12)** имеют следующее решение:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{ds_0}{s_0}=\frac{(1-\alpha_1)\alpha_2 s_1\delta_2-\alpha_1 s_2(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)}{\alpha_1 s_0(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)}\cdot\frac{ds_2}{s_2}=\frac{q_0}{q_2}\cdot\frac{ds_2}{s_2},\\&\frac{ds_1}{s_1}=\frac{(1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0\delta_2+\alpha_0 s_2)}{\alpha_1 s_0(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)}\cdot\frac{ds_2}{s_2}=\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{ds_2}{s_2},\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(П.2.13)}$$

где $q_0=(1-\alpha_1)\alpha_2 s_1\delta_2-\alpha_1 s_2(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)$,

$q_1=(1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0\delta_2+\alpha_0 s_2)$,

$q_2=\alpha_1(\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_0)s_0+(1-\alpha_1)\alpha_0 s_1$.

Поскольку параметры распределения инвестиционных товаров связаны двумя соотношениями **(П.2.8)**, то переменные s_0, s_1 являются функциями свободной переменной s_2, поэтому и функции q_0, q_1, q_2 в решении **(П.2.13)** являются функциями s_2.

Свободная переменная s_2 меняется в диапазоне

$$0\le s_2\le 1,$$

где $s_2=0$ характеризует состояние экономики как «производство для производства» (производство предметов потребления отсутствует), а $s_2=1$ соответствует $s_1=0$, что означает ситуацию «деиндустриализация, полный коллапс фондосоздающего производства», полное отсутствие всякого производства вообще.

Характер изменений s_0, s_1 на всем диапазоне изменения свободной переменной s_2 определяется знаками функций $q_0(s_2)$, $q_1(s_2)$, $q_2(s_2)$.

Поскольку $\delta_1(0)=1$, $\delta_2(0)=0$, $\delta_1(1)=0$, $\delta_2(1)=1$, то

$$q_2(0) = \alpha_1(1-\alpha_0)s_0^0 + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1^0 > 0,$$

$$\left(s_0^0 = s_0(0),\ s_1^0 = s_1(0)\right),\quad q_2(1) = 0,\ \text{поэтому}\ q_1(s_2) \geq 0.$$

Поскольку $q_0(0) = 0$, $q_0'(0) = +\infty$, $q_0(1) = -\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_0) < 0$, $q_0'(1)$ может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому в некоторой точке $\hat{s}_2$ $q_0(\hat{s}_2) = 0$. Как видим, функции $q_0(s_2)$, $q_1(s_2)$, $q_2(s_2)$ имеют характер изменения на интервале $0 \leq s_2 \leq 1$, что и $g_0(\theta_2)$, $g_1(\theta_2)$, $g_2(\theta_2)$ на интервале $0 \leq \theta_2 \leq 1$. Итак, при $0 \leq s_2 \leq \hat{s}_2$ $\left(q_0(\hat{s}_2) = 0\right)$ и $ds_2 > 0$ доля фондосоздающего сектора в расходе инвестиционных товаров сокращается, материального и потребительского — возрастает, а при $\hat{s}_2 < s_2 < \bar{s}_2$ и $ds_2 > 0$ доля потребительского возрастает за счет сокращения долей материального и фондосоздающего секторов.

Приложение 3
Оптимальный рост замкнутой трехсекторной экономики[1]

Под ***оптимальным*** понимается такое динамическое распределение трудовых и инвестиционных ресурсов, при котором за длительное время дисконтированное удельное потребление максимально.

Полученные результаты являются обобщением на случай трехсекторной экономики результатов Эрроу по оптимальному росту в односекторной экономике и Удзавы по оптимальному росту в двухсекторной экономике. Задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина.

Напомним назначение секторов трехсекторной экономики: материальный (нулевой) сектор производит предметы труда (топливо, электроэнергию, сырье и другие материалы); фондосоздающий (первый) — средства труда (машины, оборудование, силовые устройства, производственные здания и сооружения и т.д.); потребительский — предметы потребления (продовольственные и непродовольственные товары, непроизводственные здания и сооружения, вооружение и другие предметы конечного непроизводственного назначения).

Ниже предполагается, что производственные функции секторов являются линейно-однородными неоклассическими функциями

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

где X_i, K_i, L_i — выпуск, ОПФ и число занятых в i-м секторе.

Тогда согласно § 2.4 замкнутая трехсекторная модель экономики в относительных показателях задается следующими уравнениями:

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i} x_1, \quad \lambda_i = \mu_i + \nu, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(П.3.1)}$$

$$\frac{X_i}{L} = x_i = \theta_i f_i(k_i), \quad f_i(k_i) = F_i(k_i, 1), \quad i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(П.3.2)}$$

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \qquad \textbf{(П.3.3)}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \qquad \textbf{(П.3.4)}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \qquad \textbf{(П.3.5)}$$

$$\theta_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

где $k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ — текущая фондовооруженность i-го сектора;

$k_i^0 = \dfrac{K_i^0}{s_i^0 L^0}$ — начальная фондовооруженность i-го сектора;

---

[1] Результаты Приложения 3 получены автором.

L, L^0 — текущее и начальное значения общего числа занятых, $L = L^0 e^{\nu t}$;

$x_i = \dfrac{X_i}{L}$ — народно-хозяйственная производительность i-го сектора;

θ_i — доля i-го сектора в распределении трудовых ресурсов, $\theta_i^0 = \theta_i(0)$;

s_i — доля i-го сектора в распределении инвестиционных ресурсов, $s_i^0 = s_i(0)$;

a_i — прямые материальные затраты на единицу продукции i-го сектора;

μ_i — коэффициент износа ОПФ i-го сектора;

ν — темп прироста числа занятых.

Предполагается, что экзогенные параметры модели (a_i, μ_i, $i = 0, 1, 2$, ν — параметры производственных функций) постоянны.

Ниже под ***экономическим ростом*** понимается монотонный рост во времени фондовооруженности секторов, т.е. $k_i'(t) > 0$, $i = 0, 1, 2$, а под ***сбалансированностью*** — выполнение в каждый момент времени t материального, трудового и инвестиционного балансов.

Для обеспечения роста $\left(k_i'(t) > 0, \quad i = 0, 1, 2\right)$ необходимо, чтобы в каждый момент времени t правые части уравнений **(П.3.1)** были положительны:

$$-\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i}\theta_1 f_1(k_1) > 0, \quad i = 0, 1, 2, \qquad \textbf{(П.3.6)}$$

в том числе и в начальный момент времени $t = 0$:

$$k_i^0 < \frac{s_i^0 \theta_1^0}{\lambda_i \theta_i^0} f_1(k_1^0), \quad i = 0, 1, 2. \qquad \textbf{(П.3.7)}$$

Если $s_1 = s_1(t)$ монотонно растет и имеет предел $\lim\limits_{t\to\infty} s_1(t) = s_1^*$, то для роста фондовооруженности секторов достаточно выполнения условия **(П.3.7)** и условия

$$k_1^0 < k_1^S, \qquad \textbf{(П.3.8)}$$

где k_1^S — стационарное решение уравнения для фондовооруженности первого сектора, т.е. решение алгебраического уравнения

$$k_1 = \frac{s_1^* f_1(k_1)}{\lambda_1}.$$

Как говорилось выше, в качестве критерия оптимального управления трехсекторной экономикой выбран максимум интегрального дисконтированного удельного потребления

$$\max_{\theta,s}\int_0^\infty e^{-\delta t}x_2(t)dt, \qquad \textbf{(П.3.9)}$$

управляющими параметрами служат параметры распределения ресурсов $\theta=(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$, $s=(s_0,s_1,s_2)$, которые удовлетворяют соотношениям **(П.3.3)**, **(П.3.4)**, **(П.3.5)**, а фазовыми переменными — фондовооруженность секторов, которая удовлетворяет уравнениям движения **(П.3.1)**.

Поскольку шесть управляющих параметров $\theta_0,\theta_1,\theta_2$, s_0,s_1,s_2 связаны тремя соотношениями **(П.3.3)—(П.3.5)**, то три параметра — свободные. Выберем в качестве свободных параметры θ_1,s_0,s_1 и разрешим уравнения **(П.3.3)—(П.3.5)** относительно θ_0,θ_2,s_2:

$$\left.\begin{aligned}\theta_0&=\frac{b_2+(b_1-b_2)\theta_1}{1+b_2},\\ \theta_2&=\frac{1-(1+b_1)\theta_1}{1+b_2},\\ s_2&=1-s_0-s_1,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(П.3.10)}$$

где $b_i=\dfrac{a_if_i(k_i)}{(1-a_0)f_0(k_0)}$, $i=1,2$.

Если выбрано кусочно-непрерывное управляющее правило $\theta_1(t)$, $s_0(t)$, $s_1(t)$, то по уравнениям **(П.3.1)**, **(П.3.10)** однозначно определяются траектории фазовых переменных, а по этим траекториям и уравнениям **(П.3.10)** — траектории вспомогательных управляющих переменных $\theta_0(t)$, $\theta_2(t)$, $s_2(t)$.

З а м е ч а н и е. В теории оптимального уравнения допускается скачкообразное изменение управляющих параметров (их траектории кусочно-непрерывны), в то время как фазовые координаты непрерывны по времени. В нашем случае скачок одного из управляющих параметров s_0 или s_1 означает просто переход каждой фазовой переменной с траектории с левосторонними значениями управляющих параметров на траекторию с правосторонними значениями этих параметров, при этом фазовые переменные (фондовооруженность секторов) остаются непрерывными.

Совсем по-другому обстоят дела, если скачок произошел по параметру θ_1 — доле фондосоздающего сектора в трудовых ресурсах (параметр θ_1 мгновенно изменился на величину $\Delta\theta_1$). Ведь в этом случае фазовые переменные (фондовооруженность секторов $k_i = \dfrac{K_i}{\theta_i L}$) также получат мгновенные приращения (т.е. претерпят разрыв!):

$$\Delta k_i = -\frac{K_i}{\theta_i^2 L}\Delta\theta_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\Delta\theta_0 = \dfrac{(b_1 - b_2)}{1 + b_2}\Delta 0_1, \quad \Delta\theta_2 = -\dfrac{1 + b_1}{1 + b_2}\Delta\theta_1.$

Возможны три варианта действий в таком случае:

1) сгладить скачок (приближенный вариант);

2) обеспечить непрерывность фазовых переменных за счет диверсификации производства (переток трудовых ресурсов и ОПФ между секторами в момент скачка при сохранении достигнутых значений фондовооруженности секторов);

3) допустить в моменты скачков разрывы фазовых переменных при полном закреплении фондов за секторами (т.е. диверсификация невозможна).

Ниже будет применяться второй вариант, поскольку он соответствует идеологии теории оптимального управления. Покажем механизм действия этого варианта в начальный момент времени. Пусть фактические начальные значения ОПФ секторов K_i^0, $i = 0, 1, 2$, и фактическое распределение трудовых ресурсов было таким:

$$L_0^0 + L_1^0 + L_2^0 = L^0,$$

или в относительных показателях:

$$\theta_0^0 + \theta_1^0 + \theta_2^0 = 1,$$

где $\theta_i^0 = \dfrac{L_i^0}{L^0}$,

Тогда

$$k_i^0 = \frac{K_i^0}{\theta_i^0 L^0}, \quad i = 0, 1, 2,$$

и начальное удельное потребление равно

$$c^0 = \theta_2^0 f_2(k_2^0).$$

Пусть согласно оптимальному правилу (см. ниже)

$$\theta_2^*(0) = \underline{\theta}_2^0 = \frac{\underline{c}}{f_2(k_2^0)},$$

$$\theta_1^*(0) = \bar{\theta}_1^0 = \frac{1 - \left(1 + b_2^0\right)\underline{\theta}_2^0}{1 + b_1^0}, \quad b_i^0 = \frac{a_i f_i(k_i^0)}{(1 - a_0) f_0(k_0^0)},$$

$$\theta_0^*(0) = 1 - \bar{\theta}_1^0 - \underline{\theta}_2^0,$$

при этом $\theta_i^*(0) \neq \theta_i^0, \quad i = 0, 1, 2.$

Произведем теперь диверсификацию производства в начальный момент времени в соответствии с новым (оптимальным) распределением ресурсов $\left(\theta_0^*(0),\ \bar{\theta}_1^0,\ \underline{\theta}_2^0\right)$ при сохранении фондовооруженности секторов:

$$x_0^*(0) = \theta_0^*(0) f_0(k_0^0), \quad \theta_0^*(0) = \theta_0^0 + \frac{b_1^0 - b_2^0}{1 + b_1^0} \cdot \frac{c^0 - \underline{c}}{f_2(k_2^0)},$$

$$x_1^*(0) = \bar{\theta}_1^0 f_1(k_1^0), \quad \bar{\theta}_1^0 = \theta_1^0 + \frac{1 + b_2^0}{1 + b_1^0} \cdot \frac{c^0 - \underline{c}}{f_2(k_2^0)},$$

$$x_2^*(0) = c^*(0) = \underline{\theta}_2^0 f_2(k_2^0) = \underline{c}, \quad \underline{\theta}_2^0 = \theta_2^0 - \frac{c^0 - \underline{c}}{f_2(k_2^0)}.$$

В результате перетока трудовых ресурсов вместе с ОПФ[1] с сохранением фондовооруженности секторов произошло следующее перераспределение производства (диверсификация): удельный выпуск материального сектора изменился на величину $\frac{b_1^0 - b_2^0}{1 + b_1^0} \cdot \frac{c^0 - \underline{c}}{f_2(k_2^0)} \cdot f_0(k_0^0)$, удельный выпуск фондосоздающего сектора увеличился на величину $\frac{1 + b_2^0}{1 + b_1^0} \cdot \frac{c^0 - \underline{c}}{f_2(k_2^0)} \cdot f_1(k_1^0)$, а удельный выпуск потребительского сектора сократился на величину $c^0 - \underline{c}$.

Согласно принципу максимума Понтрягина, вначале строим функцию Гамильтона $\left(\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2), \quad k = (k_0, k_1, k_2)\right)$:

$$H(t, \Psi, k, \theta, s) = e^{-\delta t} \theta_2 f_2(k_2) + \sum_{i=0}^{2} \Psi_i \left(-\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i} \theta_1 f_1(k_1)\right), \quad \textbf{(П.3.11)}$$

---

[1] Физически можно представить, что эти трудовые ресурсы и используемые ими фонды остались внутри прежних предприятий, но стали выпускать другую продукцию (произошла диверсификация!).

а затем систему уравнений для сопряженных переменных:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial k_i}, \quad \Psi_i(\infty) = 0, \quad i = 0,\ 1,\ 2.$$

Поскольку

$$\frac{\partial H}{\partial k_0} = -\lambda_0 \Psi_0, \quad \frac{\partial H}{\partial k_1} = -\lambda_1 \Psi_1 + \theta_1 f'(k_1) \sum_{i=0}^{2} \frac{s_i}{\theta_i} \Psi_i,$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_2} = -\lambda_2 \Psi_2 + e^{-\delta t} s_2 f_2'(k_2),$$

то уравнения для сопряженных переменных примут следующий вид:

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = \lambda_0 \Psi_0, \quad \Psi_0(\infty) = 0,$$

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = \lambda_1 \Psi_1 - \theta_1 f'(k_1) \sum_{i=0}^{2} \frac{s_i}{\theta_i} \Psi_i, \quad \Psi_1(\infty) = 0,$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = \lambda_2 \Psi_2 - e^{-\delta t} \theta_2 f_2'(k_2), \quad \Psi_2(\infty) = 0.$$

Граничные условия для сопряженных переменных задаются в конечный момент времени T:

$$\Psi_i(T) = \left.\frac{\partial F}{\partial k_i}\right|_{t=T},$$

но $T = \infty$, $F = 0$, поэтому $\Psi_i(+\infty) = 0$, $i = 0, 1, 2$.

Поскольку в первом слагаемом функции Гамильтона есть множитель $e^{-\delta t}$, то удобнее перейти к преобразованным сопряжённым переменным:

$$\Psi_i = e^{-\delta t} q_i, \quad q_i = e^{\delta t} \Psi_i, \quad \frac{d\Psi_i}{dt} = -\delta e^{-\delta t} q_i + e^{-\delta t} \frac{dq_i}{dt}.$$

Преобразованные сопряженные переменные удовлетворяют следующим уравнениям $\left(\varepsilon_i = \lambda_i + \delta\right)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dq_0}{dt} = \varepsilon_0 q_0, && \lim_{t\to\infty} q_0(t) = q_0^E = \text{const},\\
&\frac{dq_1}{dt} = \varepsilon_1 q_1 - \theta_1 f_1'(k_1) \sum_{i=0}^{2} \frac{s_i}{\theta_i} q_i, && \lim_{t\to\infty} q_1(t) = q_1^E = \text{const},\\
&\frac{dq_2}{dt} = \varepsilon_2 q_2 - \theta_2 f_2'(k_2), && \lim_{t\to\infty} q_2(t) = q_2^E = \text{const}.
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(П.3.12)}$$

В преобразованных сопряженных переменных функция Гамильтона примет вид:

$$H(t,q,k,\theta,s)=e^{-\delta t}\left[\theta_2 f_2(k_2)+\sum_{i=0}^{2} q_i\left(-\lambda_i k_i+\theta_1\frac{s_i}{\theta_i}f_1(k_1)\right)\right]. \quad \textbf{(П.3.13)}$$

Уравнения движения **(П.3.1)** при постоянных значениях управляющих параметров имеют следующее стационарное решение (верхний индекс S — значок стационарности):

$$k_i^S(\theta,s)=\frac{\theta_1 s_i}{\lambda_i\theta_i}f_1(k_1^S)=\text{const},\quad i=0,1,2, \quad \textbf{(П.3.14)}$$

к которому стремится решение системы дифференциальных уравнений **(П.3.1)** по завершении переходного процесса.

При переходе в момент t^S в стационарное состояние функция Гамильтона **(П.3.13)** становится независимой от сопряженных и фазовых переменных:

$$H(\theta,s)=e^{-\delta t^S}\theta_2 f_2\left[k_2^S(\theta,s)\right],$$

поэтому ее максимум как функции управляющих переменных θ, s достигается в некоторой точке θ^*, s^*, которая определяется в результате максимизации удельного потребления в стационарном состоянии

$$\max_{(\theta,s)}\theta_2 f_2\left[k_2^S(\theta,s)\right]$$

при выполнении условий **(П.3.3)**—**(П.3.5)**.

Из сказанного следует, что оптимальное правило нужно искать среди траекторий управляющих параметров, обладающих свойством

$$\lim_{t\to t^S}\theta_i(t)=\theta_i^*,\quad \lim_{t\to t^S}s_i(t)=s_i^*,\quad i=0,\ 1,\ 2. \quad \textbf{(П.3.15)}$$

Поскольку функция Гамильтона, а следовательно, и оптимальное правило, зависят от сопряженных переменных, то для вывода и конкретизации последнего необходимо проанализировать поведение этих переменных во времени.

Общее решение уравнения для $q_0(t)$ имеет вид:

$$q_0(t)=C_0 e^{\varepsilon_0 t}.$$

Единственная возможность, когда это решение ограничено при больших значениях t, — это выбор $C_0=0$, т.е.

$$q_0(t)\equiv 0.$$

Общее решение для $q_2(t)$ выглядит следующим образом:

$$q_2(t)=e^{\varepsilon_2 t}\left[-\int_0^t e^{-\varepsilon_2\tau}\theta_2(\tau)f_2'\left(k_2(\tau)\right)d\tau+C_2\right].$$

Взяв по частям интеграл в квадратной скобке, получим:

$$q_2(t)=\frac{e^{\varepsilon_2 t}}{\varepsilon_2}\left[e^{-\varepsilon_2 t}\theta_2 f_2'(k_2)-\theta_2^0 f_2'(k_2^0)-\int_0^t e^{-\varepsilon_2\tau}\left[\theta_2 f_2'\left(k_2\right)\right]_\tau' d\tau+\varepsilon_2 C_2\right].$$

Поэтому единственная возможность удовлетворения конечного граничного условия состоит в выборе $C_2=\dfrac{\theta_2^0 f_2'(k_2^0)}{\varepsilon_2}$ и выполнении условия

$$\lim_{t\to\infty}\theta_2(t)f_2'\left[k_2(t)\right]=0.$$

Отсюда следует

$$q_2(t)=\frac{\theta_2(t)f_2'\left[k_2(t)\right]}{\varepsilon_2}-\frac{e^{\varepsilon_2 t}}{\varepsilon_2}\int_0^t e^{-\varepsilon_2\tau}\left[\theta_2 f_2'(k_2)\right]_\tau' d\tau. \qquad \textbf{(П.3.16)}$$

Из **(П.3.16)** видно, что $q_2(0)=\dfrac{\theta_2^0 f_2'(k_2^0)}{\varepsilon_2}>0$, поэтому согласно **(П.3.13)** $q_2'(0)=0$, но из **(П.3.13)** также следует, что $q_2''=\varepsilon_2 q_2'-$ $-\theta_2' f_2'(k_2)-\theta_2 f_2''(k_2)k_2'$, откуда наверняка $q_2''(0)=-\theta_2'(0)f_2'(k_2^0)-$ $-s_2^0 f_2''(k_2^0)k_2'(0)>0$, если $\theta_2'(0)<0$ (см. ниже). Итак, в окрестности $t=0$ $q_2(t)>0$, $q_2'(t)>0$, поэтому $q_2(t)>0$, $q_2'(t)>0$, по крайней мере, до тех пор, пока $\theta_2'(t)<0$ (ведь при этом $q_2''(t)=\varepsilon_2 q_2'-\theta_2' f_2'-\theta_2 f''>0$).

Из проведенного анализа вытекает, что уравнение для q_1 приобретает следующий вид:

$$\frac{dq_1}{dt}=bq_1-\theta_1\frac{s_2}{\theta_2}f_1'(k_1)q_2, \quad \lim_{t\to\infty}q_1(t)=q_1^E,$$

где $b=\varepsilon_1-s_1 f_1'(k_1)$.

Поведение решения этого уравнения в значительной мере зависит от знака выражения $b=\varepsilon_1-s_1 f_1'(k_1)$. В стационарной точке $k_1^S = \dfrac{s_1 f_1(k_1^S)}{\lambda_1}$ и в случае функции Кобба–Дугласа $b^S = \varepsilon_1 - \dfrac{s_1\alpha_1 f_1(k_1^S)}{k_1^S} = \lambda_1 + \delta - \alpha_1\lambda_1 > 0$, поэтому стационарное решение этого уравнения

$$q_1^S = \frac{\theta_1 f_1'(k_1^S)\dfrac{s_2}{\theta_2}q_2^S}{b_1^S} \qquad \textbf{(П.3.17)}$$

положительно. Левое значение второй производной в стационарной точке равно (в стационарной точке $q_1^S = \text{const}$, $q_2^S = \text{const}$, $s_i = \text{const}$, $\theta_i = \text{const}$, $i = 0, 1, 2$):

$$\left(q_1''\right)^S = -\left(f_1''\right)^S\left[s_1 q_1^S + \theta_1\frac{s_2}{\theta_2}q_2^S\right] > 0,$$

поэтому при подходе к стационарной точке $q_1 > 0$, $q_1' < 0$, т.е. первая сопряженная переменная убывает.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина теперь найдем максимум функции Гамильтона по свободным управляющим параметрам.

Оптимальное управление трудовыми ресурсами

Вначале найдем максимум по свободному параметру θ_1, предварительно заменив в функции Гамильтона вспомогательный параметр θ_2 его выражением через свободный параметр θ_1 согласно **(П.3.10)**.

Имеем

$$\frac{\partial H}{\partial 0_1} = e^{-\delta t}\left[-\frac{1+b_1}{1+b_2}f_2(k_2) + \frac{q_2 s_2 f_1(k_1)(1+b_2)}{\left(1-(1+b_1)\theta_1\right)^2}\right].$$

Знак этого выражения определяется знаком квадратного трехчлена (относительно θ_1):

$$-\left(1-(1+b_1)\theta_1\right)^2 + \frac{q_2 s_2 f_1(k_1)(1+b_2)^2}{f_2(k_2)(1+b_1)},$$

который имеет корни

$$\theta_1^{1,2} = \frac{1}{1+b_1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{q_2 s_2 f_1(k_1)(1+b_2)^2}{f_2(k_2)(1+b_1)}}\right).$$

Поэтому при $\theta_1^1 < \theta_1 < \theta_1^2$ производная положительна и, следовательно, функция Гамильтона растет, в противном случае — убывает.

Поскольку $\theta_2 \geq \underline{\theta}_2$, где $\underline{\theta}_2 = \dfrac{\underline{c}}{f_2(k_2)}$ ($\underline{c}$ — минимально допустимое удельное потребление), то из **(П.3.10)** вытекает, что

$$\theta_1 \leq \bar{\theta}_1, \tag{П.3.18}$$

где $\bar{\theta}_1 = \dfrac{1-(1+b_2)\underline{\theta}_2}{1+b_1}$.

З а м е ч а н и е. Обратим внимание на следующий факт: фондовооруженность материального и потребительского секторов может расти даже в том случае, когда ее производные равны нулю:

$$\frac{dk_i}{dt} = 0, \quad i = 0, 2,$$

если при этом растет фондовооруженность фондосоздающего сектора, т.е. $\dfrac{dk_1}{dt} > 0$. Поэтому можно выбирать такие значения ведущих управляющих параметров s_0, s_1, θ_1, при которых $\dfrac{dk_0}{dt} = 0$, $\dfrac{dk_1}{dt} > 0$, $\dfrac{dk_2}{dt} = 0$.

В частности, ниже будет показано, что ведущий управляющий параметр s_0 надо всегда поддерживать на минимально допустимом значении $\underline{s}_0$, а по условиям роста это значение следует из $\dfrac{dk_0}{dt} = 0$, т.е.

$$s_0^*(t) = \underline{s}_0(t) = \frac{\lambda_0 k_0 \theta_0}{\theta_1 f_1(k_1)}.$$

Ниже будет показано, что ведущий управляющий параметр θ_1 согласно оптимальному управляющему правилу при определенных условиях надо поддерживать на минимально допустимом значении $\underline{\theta}_1$, а по условиям роста это значение следует из $\dfrac{dk_2}{dt} = 0$, если при этом $s_2 \neq \underline{s}_2$, где $\underline{s}_2 = \dfrac{\lambda_2 k_2 \theta_2}{\theta_1 f_1(k_1)}$ и определяется как раз из $\dfrac{dk_2}{dt} = 0$.

Для определения $\underline{\theta}_1$ согласно замечанию приравниваем нулю правую часть уравнения для фондовооруженности потребительского сектора, предварительно подставив в него выражение **(П.3.10)** для θ_2 через θ_1, тогда получим

$$-\lambda_2 k_2 + \frac{(1+b_2)s_2\underline{\theta}_1 f_1(k_1)}{1-(1+b_1)\underline{\theta}_1} = 0.$$

Разрешив последнее уравнение относительно $\underline{\theta}_1$, имеем:

$$\underline{\theta}_1 = \frac{1}{1+b_1+(1+b_2)s_2 f_1(k_1)/\lambda_2 k_2}. \qquad \textbf{(П.3.19)}$$

Объединив **(П.3.18)** и **(П.3.19)**, получаем следующие ограничения на управляющий параметр θ_1:

$$\underline{\theta}_1 \le \theta_1 \le \overline{\theta}_1. \qquad \textbf{(П.3.20)}$$

В неравенстве **(П.3.20)** подразумевается, что $\underline{\theta}_1 \le \overline{\theta}_1$, однако это не всегда так. В самом деле, для этого нужно, чтобы

$$\frac{\lambda_2 k_2}{s_2(1+b_2)f_1(k_1)+(1+b_1)\lambda_2 k_2} \le \frac{f_2(k_2)-(1+b_2)\underline{c}}{(1+b_1)f_2(k_2)}.$$

Разрешив данное неравенство относительно $\underline{c}$, получаем:

$$\underline{c} \le \frac{f_2(k_2)}{(1+b_2)}\left[1-\frac{\lambda_2 k_2(1+b_1)}{s_2(1+b_2)f_1(k_1)+\lambda_2 k_2(1+b_1)}\right]. \qquad \textbf{(П.3.21)}$$

Поскольку правые части неравенства **(П.3.21)** растут с ростом фондовооруженности секторов и при плавном изменении управляющих параметров s_0, s_2, то неравенства **(П.3.21)** следует проверять в начальной точке, а также в точках разрыва управляющего правила по свободным параметрам s_0, s_1, поскольку при этом имеет место разрыв и по вспомогательному параметру s_2.

Итак, $\underline{\theta}_1 \le \overline{\theta}_1$, по крайней мере, тогда, когда неравенство **(П.3.21)** выполнено в начальной точке, т.е.

$$\underline{c} \le \frac{f_2(k_2^0)}{(1+b_2^0)}\left[1-\frac{\lambda_2 k_2^0(1+b_1^0)}{s_2^0(1+b_2^0)f_1(k_1^0)+\lambda_2 k_2^0(1+b_1^0)}\right], \qquad \textbf{(П.3.22)}$$

где $k_i^0 = \dfrac{K_i^0}{\theta_i^0 L^0}$, $i = 0, 1, 2.$

Оптимальное управляющее правило по параметру θ_1 получается путем соединения условий оптимальности, полученных выше, с ограничениями (П.3.20). Поскольку $\overline{\theta}_1 < \frac{1}{1+b_1} < \theta_1^2$, то значение θ_1^2, в котором функция Гамильтона имеет локальный максимум по параметру θ_1, исключается из рассмотрения. Если $\underline{\theta}_1 > \theta_1^1$, то и значение θ_1^1 исключается из рассмотрения, поэтому на отрезке $\left[\underline{\theta}_1, \theta_1^1\right]$ функция Гамильтона монотонно растет по θ_1, достигая максимума — в точке $\overline{\theta}_1$.

Если же $\underline{\theta}_1 < \theta_1^1$, то функция Гамильтона на полуинтервале $\left[\underline{\theta}_1, \theta_1^1\right)$ убывает, достигает минимума в точке θ_1^1, после чего на полуинтервале $\left(\theta_1^1, \overline{\theta}_1\right]$ возрастает, поэтому ее максимум достигается в одном из концов отрезка $\left[\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1\right]$, т.е.

$$\max_{\underline{\theta}_1 \le \theta_1 \le \overline{\theta}_1} H(\theta_1) = \max\left[H(\underline{\theta}_1),\ H(\overline{\theta}_1)\right].$$

Оптимальное управление инвестиционными ресурсами

Теперь найдем максимум функции Гамильтона по свободным параметрам s_0, s_1. Выразив s_2 через свободные параметры s_0, s_1, получаем следующее выражение для функции Гамильтона как функции параметров s_0, s_1:

$$H(s_0, s_1) = e^{-\delta t}\left[\theta_2 f_2(k_2) + q_1\left(-\lambda_1 k_1 + s_1 f_1(k_1)\right) + \right.$$
$$\left. + q_2\left(-\lambda_2 k_2 + \frac{1 - s_0 - s_1}{\theta_2}\theta_1 f_1(k_1)\right)\right].$$

Поскольку функция Гамильтона линейно зависит от s_0, а коэффициент при s_0 отрицателен, то оптимальное правило по s_0 состоит в выборе $s_0^* = \underline{s}_0(t)$, где $\underline{s}_0(t) = \frac{\lambda_0 \theta_0 k_0}{\theta_1 f_1(k_1)}$.

По параметру s_1 также имеет место линейная зависимость

$$H(s_1) = e^{-\delta t}\left[\beta + \gamma s_1\right],$$

где $\beta = \theta_2 f_2(k_2) - \sum_{i=1}^{2} q_i \lambda_i k_i + \frac{\theta_1(1 - s_0)}{\theta_2} f_1(k_1)$, $\gamma = f_1(k_1)\left[q_1 - \frac{\theta_1}{\theta_2} q_2\right]$.

Поэтому оптимальное правило при $t<t^s$ по параметру s_1 состоит в следующем:

$$s_1^*(t)=\begin{cases}\overline{s}_1, & \theta_2 q_1-\theta_1 q_2>0,\\ \underline{s}_1, & \theta_2 q_1-\theta_1 q_2<0,\end{cases} \qquad (\text{П.3.23})$$

где $\underline{s}_1=\dfrac{\lambda_1 k_1}{f_1(k_1)}+\eta \quad \left(\eta>0,\ \ \eta=\eta(t)-\text{малая величина},\ \lim\limits_{t\to t^S}\eta(t)=0\right)$,

$$\overline{s}_1=1-\underline{s}_0-\underline{s}_2\left(\underline{s}_i=\frac{\lambda_i k_i\theta_i}{\theta_1 f_1(k_1)},\ \ i=0,2\right).$$

Для конкретизации управляющего правила **(П.3.23)** исследуем знак функции

$$\tilde{\gamma}(t)=\theta_2 q_1-\theta_1 q_2 .$$

Имеем

$$\tilde{\gamma}=\theta_2^0 q_1^0-\theta_1^0 q_2^0 .$$

Но поскольку не удается найти $q_1(0)=q_1^0$, то заменяем в последнем выражении q_1^0 на $q_1^S=q_1(t^S)$ (ведь $q_1(t)$ убывает). Тогда согласно **(П.3.14)**, **(П.3.15)**, **(П.3.17)**

$$\tilde{\gamma}(0)>\frac{\theta_1^0 q_2^0}{b^S}\left[\frac{q_2^S}{q_2^0}\cdot\frac{\theta_1^*}{\theta_1^0}\cdot\frac{\theta_2^0 s_2^*}{\theta_2^*}f_1'(k_1^S)-b^S\right].$$

В случае, если производственные функции секторов являются функциями Кобба—Дугласа вида

$$b^S=(1-\alpha_1)\lambda_1+\delta,\ \ f_1'(k_1^S)=\frac{\alpha_1\lambda_1}{s_1^*},$$

поэтому $\left(\dfrac{s_2^*}{s_1^*}=\dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\right)$

$$\tilde{\gamma}(0)>\frac{\theta_1^0 q_2^0}{b^S}\left[\frac{q_2^S}{q_2^0}\cdot\frac{\theta_1^*}{\theta_1^0}\cdot\frac{\theta_2^0}{\theta_2^*}(1-\alpha_1)\lambda_1-(1-\alpha_1)\lambda_1-\delta\right], \qquad (\text{П.3.24})$$

но $\dfrac{q_2^S}{q_2^0}>1$ ($q_2(t)$ растет), откуда следует, что

$$\tilde{\gamma}(0)>0,$$

по крайней мере, в том случае, когда

$$\delta < \tilde{\delta}, \quad \tilde{\delta} = (1-\alpha_1)\left(\frac{\theta_1^* \theta_2^0}{\theta_1^0 \theta_2^*} - 1\right)\lambda_1. \qquad \textbf{(П.3.25)}$$

На самом деле, верхняя граница $\overline{\delta}$, определяемая из условия $\tilde{\gamma}(0) > 0$, больше, чем $\tilde{\delta}$, поскольку значение q_1^0 было заменено меньшим значением q_1^S.

Рассмотрим теперь $\tilde{\gamma}(t)$ в стационарной точке

$$\tilde{\gamma}(t^S) = \frac{\theta_1^* q_2^S}{b^S}\left[\alpha_1 \frac{\overset{*}{s}_2}{\overset{*}{s}_1}\lambda_1 - (1-\alpha_1)\lambda_1 - \delta\right].$$

Из последнего выражения видно, что

$$\tilde{\gamma}(t^S) = -\frac{\theta_1^* \overset{*}{q}_2}{b^S}\delta < 0, \qquad \textbf{(П.3.26)}$$

поскольку $\dfrac{\overset{*}{s}_2}{\overset{*}{s}_1} = \dfrac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}$.

Таким образом, имеется два варианта оптимального правила по параметру s_1:

1) если $\underline{\delta} < \delta < \overline{\delta}$, то

$$s_1^*(t) = \begin{cases} \overline{s}_1(t), & 0 \le t < \hat{t} \quad \left(\hat{t} - \text{точка перелома; } \gamma(\hat{t}) = 0\right), \\ \underline{s}_1(t), & \hat{t} \le t < \infty, \end{cases} \qquad \textbf{(П.3.27)}$$

$$\lim_{t \to t^S} \underline{s}_1(t) = \overset{*}{s}_1;$$

2) если $\delta > \overline{\delta}$, то

$$s_1^*(t) = \underline{s}_1(t), \quad 0 \le t < \infty, \quad \lim_{t \to t^S} \underline{s}_1(t) = \overset{*}{s}_1. \qquad \textbf{(П.3.28)}$$

З а м е ч а н и е. Приведение потребления в будущие моменты времени к начальному осуществляется с помощью экспоненциально убывающих весов $\delta e^{-\delta t}dt$. При этом $\delta\int_0^\infty e^{-\delta t}dt = 1$, тем самым будущее потребление имеет с точки зрения настоящего меньшую ценность. При выборе δ сравнительно большим будущее потребление практически не принимается во внимание, в то время как преследуется цель максимизировать именно настоящее потребление. С содержательной точки зрения это означает, что интересами будущих поколений пренебрегают. Напротив, при малых значениях δ интересы будущих поколений принимаются во внимание, хотя и с несколько меньшими весами по сравнению с настоящим поколением.

С учетом сделанного замечания параметр дисконтирования δ надо выбирать сравнительно небольшим. На наш взгляд, наиболее реалистичен случай

$$\underline{\delta} < \delta < \bar{\delta}, \qquad \textbf{(П.3.29)}$$

поскольку слишком малое значение δ означает, что придается чрезмерный приоритет будущим значениям удельного потребления в ущерб настоящим. Нижняя граница $\underline{\delta}$ будет найдена ниже.

Нижняя и верхняя границы интервала **(П.3.29)** оказались пропорциональными параметру λ (далее для простоты примем, что коэффициенты износа ОПФ секторов одинаковы и равны $\mu_i = \mu$, $i = 0,\ 1,\ 2$, поэтому одинаковы и параметры $\lambda_i = \mu_i + \nu = \mu + \nu = \lambda$):

$$\underline{\delta} = \underline{h}\lambda, \quad \bar{\delta} = \bar{h}\lambda,$$

где $\underline{h} = \dfrac{3 - 2\dfrac{c}{c*} - \left(\dfrac{c}{c*}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{c}{c*}\right)^2}$, $\quad \bar{h} > \tilde{h} = \dfrac{\theta_1^*}{\theta_1^0} \cdot \dfrac{\theta_2^0}{\theta_2^*} \cdot \dfrac{s_2^*}{s_1^*} \alpha_1 - (1 - \alpha_1)$.

Синтез оптимального правила управления трудовыми и инвестиционными ресурсами $\left(\underline{\delta} < \delta < \bar{\delta}\right)$

Выше были найдены фрагменты оптимального управляющего правила по управляющим параметрам θ_1, s_0, s_1 при различных значениях параметра дисконтирования δ. По этим фрагментам оптимальное правило может быть синтезировано для любых значений экзогенных параметров. Ниже оптимальное правило синтезируется для наиболее интересного с практической точки зрения случая $\underline{\delta} < \delta < \bar{\delta}$.

В этом случае оптимальное правило по параметру s_1 имеет вид **(П.3.27)**, согласно которому выделяются д в а этапа:

1) ускоренный рост при $t < \hat{t}$;

2) замедленный рост при $t \geq \hat{t}$.

Этап ускоренного роста ($0 \le t < \hat{t}$). На этом этапе доля фондосоздающего сектора в инвестиционных ресурсах поддерживается на максимально допустимом уровне $s_1^*(t) = \overline{s}_1(t)$, который определяется из условия, что доли материального и потребительского секторов устанавливаются на минимально допустимых уровнях:

$$s_0^*(t) = \underline{s}_0(t) = \frac{\theta_0 \lambda_0 k_0}{\theta_1 f_1(k_1)}, \quad s_2^*(t) = \underline{s}_2(t) = \frac{\theta_2 \lambda_2 k_2}{\theta_1 f_1(k_1)}, \tag{П.3.30}$$

поэтому

$$s_1^*(t) = 1 - s_0^*(t) - s_2^*(t).$$

Строение управляющего правила по параметру θ_1 (см. **(П.3.21)**) зависит от соотношений между величинами θ_1^l, $\underline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_1$. Поскольку условия «нулевого» роста материального и потребительского секторов уже были использованы при выборе $s_0^*(t) = \underline{s}_0(t)$, $s_2^*(t) = \underline{s}_2(t)$, то $\underline{\theta}_1 = 0$.

Поскольку θ_1^l — точка локального минимума функции Гамильтона (причем значение θ_1^l может быть даже отрицательным), то

$$\max_{\theta_1} H(\theta_1) = H(\overline{\theta}_1),$$

поэтому

$$\theta_1^*(t) = \overline{\theta}_1(t) = \frac{1 - (1 + b_2)\dfrac{\underline{c}}{f_2(k_2)}}{1 + b_1}, \tag{П.3.31}$$

причем $\overline{\theta}_1(t)$ растет, поскольку $\theta_2^*(t) = \underline{\theta}_2(t) = \dfrac{\underline{a}}{f_2(k_2)}$ убывает.

Ведомый параметр θ_0 согласно **(П.3.10)** изменяется следующим образом:

$$\theta_0^*(t) = \frac{b_2 + (b_1 - b_2)\overline{\theta}_1}{1 + b_2}. \tag{П.3.32}$$

Фазовые переменные подчиняются уравнениям движения **(П.3.1)** (в которых управляющие переменные изменяются согласно оптимальному управляющему правилу **(П.3.31)—(П.3.33)**) с начальными условиями

$$k_i^0 = \frac{K_i^0}{\theta_i^0 L^0}, \quad i = 0, 1, 2,$$

где θ_i^0 — фактическая доля i-го сектора в трудовых ресурсах при $t = 0$.

Этап замедленного роста $(t \geq \hat{t})$. На этапе замедленного роста доля фондосоздающего сектора в инвестиционных ресурсах поддерживается на минимально возможном уровне:

$$s_1^*(t) = \frac{\lambda k_1}{f_1(k_1)}(1+\eta), \quad \eta > 0, \quad \lim_{t \to t^S} \eta(t) = 0. \qquad \textbf{(П.3.33)}$$

Наличие добавки η вызвано необходимостью «дотянуть» фондовооруженность фондосоздающего сектора до оптимального стационарного значения k_1^* (ведь $\hat{k}_1 = k_1(\hat{t}) < k_1^*$).

При управлении **(П.3.33)** фондовооруженность фондосоздающего сектора удовлетворяет следующему уравнению движения:

$$\frac{dk_1}{dt} = -\lambda_1 k_1 \eta, \quad k_1(\hat{t}) = \hat{k}_1, \qquad \textbf{(П.3.34)}$$

которое имеет решение

$$k_1(t) = \hat{k}_1 e^{\lambda_1 \int_{\hat{t}}^{t} \eta(\tau) d\tau}. \qquad \textbf{(П.3.35)}$$

Поскольку $\lim_{t \to \infty} k_1(t) = k_1^*$, то

$$\int_{\hat{t}}^{\infty} \eta(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{k_1^*}{\hat{k}_1}. \qquad \textbf{(П.3.36)}$$

Если функция $\eta(t)$, удовлетворяющая условиям **(П.3.33)**, **(П.3.36)**, задана, то по формуле **(П.3.34)** однозначно определяется $k_1(t)$, а затем по формуле **(П.3.33)** — $s_1^*(t)$. Зная $s_1^*(t)$ и $s_0^*(t) = \underline{s}_0(t)$, находим

$$s_2^*(t) = 1 - s_0^*(t) - s_1^*(t).$$

В связи с тем, что условие нулевого роста фондовооруженности потребительского сектора теперь освободилось ($s_2^*(t) > \underline{s}_2(t)$ при $t \geq \hat{t}$), то его (условие) можно использовать для установления нижней границы параметра θ_1:

$$\underline{\theta}_1(t) = \frac{1}{1 + b_1 + (1 + b_2)s_2^*(t)\dfrac{f_1(k_1)}{\lambda_2 k_2}}.$$

Докажем (при условии, что ПФ секторов — функции Кобба—Дугласа), что в момент достижения стационарного оптимального состояния

$$\lim_{\substack{t \to t^S \\ t < t^S}} \theta_1^*(t) = \underline{\theta}_1^* = \theta_1^*. \tag{П.3.37}$$

В самом деле, согласно оптимальному правилу по параметру θ_1 в окрестности t^S имеет место альтернатива

$$\theta_1^*(t) = \begin{cases} \underline{\theta}_1, & H(\underline{\theta}_1) > H(\bar{\theta}_1), \\ \bar{\theta}_1, & H(\underline{\theta}_1) < H(\bar{\theta}_1), \end{cases}$$

причем $\theta_1^*(t) = \underline{\theta}_1$ только в том случае, когда $\underline{\theta}_1 < \theta_1^1 < \bar{\theta}_1$ и $\theta_1^1 - \underline{\theta}_1 \geq \bar{\theta}_1 - \theta_1^1$.

Докажем вначале, что $\underline{\theta}_1 < \theta_1^1$. Указанное неравенство в развернутом виде записывается следующим образом $\left(\bar{\theta}_2 = \dfrac{1 - (1 + b_1)\underline{\theta}_1}{1 + b_2}\right)$:

$$\frac{1}{1 + b_1}\left[1 - (1 + b_2)\sqrt{\frac{q_2 s_2 f_1(k_1)}{(1 + b_1) f_2(k_2)}} - (1 + b_1)\underline{\theta}_1\right] > 0$$

или

$$\sqrt{\frac{q_2 s_2 f_1(k_1)}{(1 + b_1) f_2(k_2)}} < \bar{\theta}_2.$$

Рассмотрим последнее неравенство в момент $t = t^S$, тогда

$$q_2 = \frac{\theta_2^* \alpha_2 f_2(k_2^*)}{\varepsilon_2 k_2^*}, \quad \lambda_2 k_2^* = \frac{s_2^*}{\theta_2^*}\theta_1^* f_1(k_1^*), \tag{П.3.38}$$

поэтому неравенство эквивалентно следующему (подставляем вышеуказанные выражения в неравенство, используем обозначение $\delta = \lambda h$ и соотношение $(1 + b_1)\theta_1 + (1 + b_2)\theta_2 = 1$):

$$\theta_2^*\left[1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\theta_1^*(1 + h)(1 + b_1^*)}}\right] > 0.$$

Последнее неравенство будет выполнено, если (используем $(1+b_1^*)\theta_1^* = \alpha_2$)

$$\sqrt{\frac{1}{1+h}} < 1,$$

но ведь это очевидное неравенство, так как $h > 0$.

Итак, в оптимальной стационарной точке $\underline{\theta}_1 < \theta_1^1$, поэтому данное неравенство будет выполнено и в некоторой окрестности стационарной оптимальной точки (т.е. при некоторых t, $t < t^S$), если только в точке $t = t^S$ не произошел скачок по управляющему параметру 0_1.

Докажем теперь, что $\bar{\theta}_1 - \theta_1^1 \le \theta_1^1 - \underline{\theta}_1$. Имеем $\left(\bar{\theta}_2 = \dfrac{1-(1+b_1)\theta_1}{1+b_2}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\bar{\theta}_1 - \theta_1^1 = \frac{1+b_2}{1+b_1}\left[-\underline{\theta}_2 + \sqrt{\frac{q_2 s_2 f_1(k_1)}{(1+b_1)f_2(k_2)}}\right],\\
&\theta_1^1 - \underline{\theta}_1 = \frac{1+b_2}{1+b_1}\left[\bar{\theta}_2 - \sqrt{\frac{q_2 s_2 f_1(k_1)}{(1+b_1)f_2(k_2)}}\right],\\
&\left(\theta_1^1 - \underline{\theta}_1\right) - \left(\bar{\theta}_1 - \theta_1^1\right) = \frac{1+b_2}{1+b_1}\left[\bar{\theta}_2 + \underline{\theta}_2 - 2\sqrt{\frac{q_2 s_2 f_1(k_1)}{(1+b_1)f_2(k_2)}}\right].
\end{aligned} \tag{П.3.39}$$

Рассмотрим содержимое квадратных скобок в оптимальной стационарной точке $\left(\bar{\theta}_2^* = \theta_2^* = \dfrac{1-\alpha_2}{1+b_2^*},\ \ \underline{\theta}_2^* = \dfrac{\underline{c}(1-\alpha_2)}{c^*(1+b_2^*)}\right)$, при этом снова используем соотношения **(П.3.38)**:

$$\bar{\theta}_2^* + \underline{\theta}_2^* - \frac{2\theta_2^*}{\sqrt{1+h}} = \theta_2^*\left(1 + \frac{\underline{c}}{c^*} - \frac{2}{\sqrt{1+h}}\right).$$

Таким образом, в окрестности оптимальной стационарной точки

$$\theta_1^1 - \underline{\theta}_1 \ge \bar{\theta}_1 - \theta_1^1, \text{ если } h \ge \underline{h},$$

где $\underline{h}$ — решение уравнения

$$1 - \frac{\underline{c}}{c^*} - \frac{2}{\sqrt{1+h}} = 0,$$

$$\underline{h} = \frac{3 - 2\dfrac{\underline{c}}{c^*} - \left(\dfrac{\underline{c}}{c^*}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{\underline{c}}{c^*}\right)^2}. \tag{П.3.40}$$

Итак, при $h \geq \underline{h}$ в окрестности $t = t^S$

$$\theta_1^*(t) = \underline{\theta}_1(t) = \frac{1}{1 + b_1 + (1 + b_2)\dfrac{s_2 f_1(k_1)}{\lambda_2 k_2}}. \qquad \text{(П.3.41)}$$

Поскольку при $t = \hat{t}$ $\theta_1^*(\hat{t}) = \overline{\theta}_1(\hat{t})$, то на интервале $(\hat{t},\ t^S)$ найдется такой момент времени $\tilde{t}$, в который

$$H\left[\underline{\theta}_1(\tilde{t})\right] = H\left[\overline{\theta}_1(\tilde{t})\right], \qquad \text{(П.3.42)}$$

т.е. в этот момент времени произойдет переключение управляющего параметра θ_1 со значения $\overline{\theta}_1(\tilde{t})$ на значение $\underline{\theta}_1(\tilde{t})$.

З а м е ч а н и е. Если бы оказалось, что всегда $\underline{h} > \overline{h}$, т.е. отрезок $\left[\underline{h},\ \overline{h}\right]$ не существует, то вышеприведенный синтез оптимального правила стал бы бессмысленным. Используя реальные данные РФ, покажем, что такой отрезок может существовать. Так, согласно данным[1] экономики РФ конца 1980-х гг. $\theta_1^0 = 0,14$; $\theta_2^0 = 0,56$. По данным экономики РФ за 1960—1990 гг. доцент кафедры прикладной математики ГУУ Л.А. Константинова нашла коэффициенты функций Кобба—Дугласа и коэффициенты прямых материальных затрат секторов, которые оказались следующими: $A_0 = 6,19$, $\alpha_0 = 0,46$, $a_0 = 0,39$; $A_1 = 1,35$, $\alpha_1 = 0,68$, $a_1 = 0,29$; $A_2 = 2,71$, $\alpha_2 = 0,49$, $a_2 = 0,52$. В [6] по этим данным был найден технологический оптимум экономики РФ тех лет. Оказалось, $\theta_0^* = 0,4$, $\theta_1^* = 0,25$, $\theta_2^* = 0,35$. По формуле **(П.3.25)** находим оценку снизу $\tilde{h}$ верхней границы $\overline{h}$:

$$\tilde{h} = (1 - \alpha_1)\left(\frac{\theta_1^* \theta_2^0}{\theta_1^0 \theta_2^*} - 1\right) = 0,6.$$

Выбрав $\underline{c}$ таким образом, что $\dfrac{\underline{c}}{c^*} = 0,7$, имеем по формуле **(П.3.40)** $\underline{h} = 0,38$.

Поэтому

$$\underline{h} = 0,38 < 0,6 = \tilde{h} < \overline{h},$$

т.е. отрезок действительно существует.

[1] Народное хозяйство РСФСР: Статистический ежегодник. — М.: Статистика, 1960—1990.

Таким образом, для наиболее интересного с практической точки зрения случая $\underline{h}\lambda < \delta < \bar{h}\lambda$ синтезировано следующее оптимальное управляющее правило.

Этап ускоренного роста $\left(0 \le t < \hat{t} \quad \left(\theta_2(\hat{t})q_1(\hat{t}) - \theta_1(\hat{t})q_2(\hat{t}) = 0\right)\right)$.

$$\theta_0^*(t) = 1 - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t), \qquad s_0^*(t) = \frac{\theta_0^*(t)\lambda_0 k_0(t)}{\theta_1^*(t) f_1\left[k_1(t)\right]},$$

$$\theta_1^*(t) = \frac{1-(1+b_2)\theta_2^*(t)}{1+b_1}, \qquad s_1^*(t) = 1 - s_0^*(t) - s_2^*(t),$$

$$\theta_2^*(t) = \frac{c}{f_2\left[k_2(t)\right]}, \qquad s_2^*(t) = \frac{\theta_2^*(t)\lambda_2 k_2(t)}{\theta_1^*(t) f_1\left[k_1(t)\right]}.$$

Фазовые переменные k_0, k_1, k_2 находятся по уравнениям движения **(П.3.1)** при $\theta_i(t) = \theta_i^*(t)$, $s_i(t) = s_i^*(t)$, $i = 0, 1, 2$, и с начальными условиями

$$k_i(0) = \frac{K_i(0)}{0_i^0 L(0)}, \quad i = 0, 1, 2,$$

где θ_i^0 — фактическая доля i-го сектора в трудовых ресурсах в начальный момент времени.

Начальная фаза этапа замедленного роста $\left(\hat{t} \le t < \tilde{t},\ H\left[\underline{\theta}_1(\tilde{t})\right] = H\left[\bar{\theta}_1(\tilde{t})\right]\right)$.

$$\theta_0^*(t) = 1 - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t), \qquad s_0^*(t) = \frac{\theta_0^*(t)\lambda_0 k_0(t)}{\theta_1^*(t) f_1\left[k_1(t)\right]},$$

$$\theta_1^*(t) = \frac{1-(1+b_2)\theta_2^*(t)}{1+b_1}, \qquad s_1^*(t) = \frac{\lambda_1 k_1(t)}{f_1\left[k_1(t)\right]}\left[1+\eta(t)\right],\ \eta > 0,$$

$$\lim_{t \to t^S} \eta(t) = 0, \qquad \theta_2^*(t) = \frac{c}{f_2[k_2(t)]}, \qquad s_2^*(t) = 1 - s_0^*(t) - s_1^*(t).$$

Фазовые переменные k_0, k_1, k_2 находятся по уравнениям движения **(П.3.1)** при $\theta_i(t) = \theta_i^*(t)$, $s_i(t) = s_i^*(t)$, $i = 0, 1, 2$, и с начальными условиями

$$k_i(\hat{t}) = \hat{k}_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\hat{k}_i = k_i(\hat{t} = 0)$ — конечная фондовооруженность i-го сектора, определенная на предыдущем этапе.

Завершающая фаза этапа замедленного роста $\left(\tilde{t} \le t \le t^S\right)$.

$$\theta_0^*(t) = 1 - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t),$$

$$\theta_1^*(t) = \frac{1}{1 + b_1 + (1 + b_2)\dfrac{s_2^*(t) f_1\left[k_1(t)\right]}{\lambda_2 k_2(t)}},$$

$$\theta_2^*(t) = \frac{1 - (1 + b_1)\theta_1^*(t)}{1 + b_2},$$

$$s_0^*(t) = \frac{\theta_0^*(t)\lambda_0 k_0(t)}{\theta_1^*(t) f_1\left[k_1(t)\right]},$$

$$s_1^*(t) = \frac{\lambda_1 k_1(t)}{f_1\left[k_1(t)\right]}\left[1 + \eta(t)\right], \ \eta > 0, \ \lim_{t \to t^S} \eta(t) = 0,$$

$$s_2^*(t) = 1 - s_0^*(t) - s_1^*(t).$$

Фазовые переменные находятся по уравнениям движения **(П.3.1)** при $\theta_i(t) = \theta_i^*(t)$, $s_i(t) = s_i^*(t)$ и с начальными условиями

$$k_i(\tilde{t}) = \tilde{k}_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\tilde{k}_i = k_i(\tilde{t} = 0)$ — конечная фондовооруженность i-го сектора на начальной фазе этапа замедленного роста.

На рис. П.3.1—П.3.4 приведены графики изменения во времени управляющих параметров θ_1, s_1, фондовооруженности фондосоздающего сектора и удельного потребления.

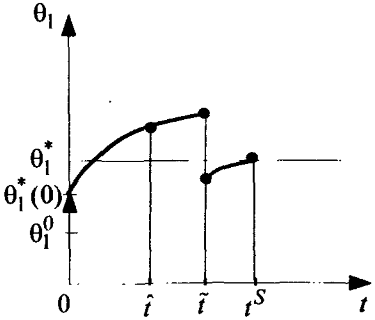

Рис. П.3.1. Оптимальное правило по управляющему параметру θ_1

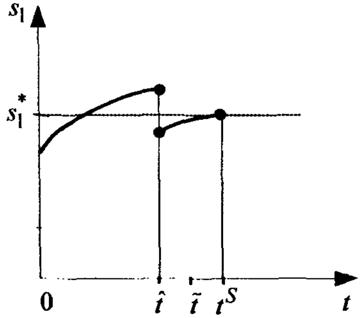

Рис. П.3.2. Оптимальное правило по управляющему параметру s_1

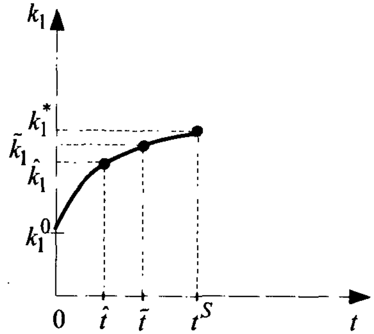

Рис. П.3.3. ***График фондовооруженности фондосоздающего сектора***

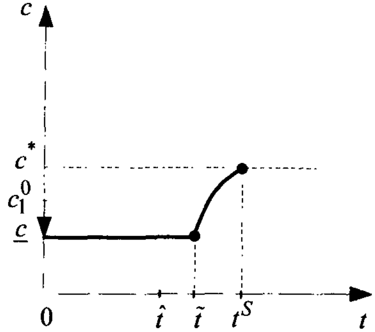

Рис. П.4.4. ***График удельного потребления***

Итак, *оптимальный экономический рост*, найденный с помощью принципа максимума Понтрягина по трехсекторной модели экономики, имеет характерные черты *мобилизационной экономики.* На первом этапе происходит перелив трудовых и инвестиционных ресурсов из потребительского сектора (за счет сокращения удельного потребления до минимально допустимого уровня $\underline{c}$) в секторы, производящие средства производства. В результате имеет место *ускоренный рост производственного потенциала* всех секторов, в особенности фондосоздающего, вплоть до переломного момента времени $\hat{t}$, в который фондовооруженность всех секторов становится весьма близкой к оптимальным стационарным значениям. После этого наступает *этап замедленного роста*, на котором фондовооруженность секторов постепенно достигает своих оптимальных стационарных значений. На начальной фазе этапа происходит перелив инвестиционных ресурсов в потребительский сектор, на завершающей фазе к инвестиционным присоединяются и трудовые ресурсы.

Приложение 4
О соотношении оптимальных управляющих правил переходного и стационарного режимов[1]

В модели оптимального экономического роста, описанной в § 1.6, в качестве критерия оптимальности рассматривается дисконтированное удельное потребление

$$\max \int_0^\infty e^{-\delta t} c(t) dt, \tag{П.4.1}$$

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + f(k) - c, \quad k(0) = k_0.$$

При этом роль фазовой координаты выполняет фондовооруженность k, роль управляющего параметра — удельное непроизводственное потребление c, а критерием служит дисконтированное удельное потребление $\int_0^\infty e^{-\delta t} c(t) dt$, δ — параметр дисконтирования.

В этой задаче

$$f(k) = F(k, 1),$$

где $F(K, L)$ — линейно-однородная неоклассическая производственная функция;

$$\lambda = \mu + \nu,$$

где μ, ν — соответственно коэффициент износа и темп прироста числа занятых.

Решение этой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина приводит при $k_0 \le k^*$ к следующему правилу:

$$c^*(t) = \begin{cases} \underline{c}, & 0 \le t \le \hat{t}, \\ c^*, & \hat{t} < t < \infty, \end{cases}$$

где c^* — решение задачи в стационарной постановке

$$\begin{cases} \max \ c, \\ -\lambda k + f(k) - c = 0. \end{cases}$$

Такой же характер имеет решение и для замкнутой трехсекторной экономики, как это показано в Приложении 3. Все это дает основание полагать, что подобная закономерность при определенных условиях имеет место и в общем случае.

---

[1] Результаты Приложения 4 получены автором.

Рассмотрим общую задачу оптимального управления в стационарной постановке:

$$\max_{n \in U} f_0(x, u), \tag{П.4.2}$$

$$f(x,u) = 0, \tag{П.4.3}$$

где $f_0(x,u)$ — критериальная функция;

$x = (x_1, ..., x_n)'$ — переменные (фазовые координаты);

$u = (u_1, ..., u_r)'$ — управляющие параметры;

U — область допустимых значений управляющих параметров;

$f(x,u) = (f_1(x,u), ..., f_m(x,u))'$ — набор функций, определяющих ограничения задачи.

Тогда соответствующая задача управления в динамической постановке с дисконтированным критерием выглядит следующим образом:

$$\max \int_0^\infty e^{-\delta t} f_0(x, u) dt, \tag{П.4.4}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \quad x(0) = x^0, \tag{П.4.5}$$

где $u = u(t)$ — кусочно-непрерывные (непрерывные слева) управления, принимающие значения в области управления U.

Согласно принципу максимума Понтрягина решение задачи **(П.4.4)**, **(П.4.5)** начинается с построения функции Гамильтона

$$H = e^{-\delta t} f_0(x, u) + \sum_{j=1}^{m} \psi_j f_j(x, u) \tag{П.4.6}$$

и уравнений для сопряженных переменных

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

или

$$\frac{d\psi_i}{dy} = e^{-\delta t} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., m. \tag{П.4.7}$$

Граничные условия для сопряженных переменных задаются в конечный момент времени T (условия трансверсальности):

$$\psi_i(T) = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t = T},$$

но в нашем случае $T=\infty$, $F=0$, поэтому должно быть

$$\lim_{t\to\infty} \psi_i\left(t\right)=0, \quad i=1,\dots,m. \tag{П.4.8}$$

Из уравнений **(П.4.7)** согласно [4] следует, что их решение при ограниченных $\dfrac{\partial f_0}{\partial x_i}$ $\psi\left(t\right)\to 0$ при $t\to\infty$, если матрица A, составленная из производных правых частей уравнений **(П.4.5)** по фазовым координатам

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix},$$

устойчива в любой точке на допустимой фазовой траектории, т.е. имеет в такой точке собственные значения с отрицательными действительными частями.

Исследуем решение прямых уравнений **(П.4.5)** при условиях, характерных для моделей экономического роста:

$$f(x,\ u)\ge 0. \tag{П.4.9}$$

Обозначим стационарное решение уравнений **(П.4.5)** при фиксированном управлении $u\in U$ через $x^E(u)$, т.е. $x^E(u)$ — решение при $u=\mathrm{const}$ системы алгебраических уравнений (полагаем, что это решение единственное)

$$f(x,u)=0. \tag{П.4.10}$$

□ Докажем теперь, что при $x^0<x^E(u)$ и фиксированном u

$$\lim_{t\to\infty} x(t,\ u)=x^E(u).$$

Рассмотрим конечно-разностный аналог уравнений **(П.4.5)**

$$x(t+\Delta t,\ u)=x(t,\ u)+f\left[x(t,u),\ u\right]\Delta t. \tag{П.4.11}$$

Поскольку $x^0<x^E(u)$, то $f(x^0,\ u)>0$, поэтому из **(П.4.12)** следует, что при движении по фазовой траектории с $u=\mathrm{const}$

$$x(t+\Delta t,u)>x(t,u), \tag{П.4.12}$$

т.е. при фиксированном управлении u фазовые координаты являются возрастающими функциями времени.

Предположим теперь, что при неограниченном росте t имеется предел

$$\lim_{t\to\infty} x(t,u)=\tilde{x}(u),\ \ \tilde{x}(u)<x^E(u),$$

но это оказывается невозможным, так как $f(\tilde{x}(u),u)>0,$ поэтому из точки $\tilde{x}(u),$ как начальной, можно снова начать движение по возрастающей разовой траектории.

Поэтому в случае существования предела последний оказывается равным $x^E(u),$ поскольку является неподвижной точкой относительно уравнения **(П.4.11)**.

Но предел существует, поскольку любая последовательность $x(n\Delta t,u)$ возрастает и ограничена сверху значением $x^E(u).$

Итак,

$$\lim_{t\to\infty} x(t,u)=x^E(u).\ ■$$

□ Пусть теперь имеется некоторое допустимое управление $u(t)$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} u(t)=u.$$

Тогда снова получаем

$$\lim_{t\to\infty} x(t,\ u(t))=x^E(u).$$

В самом деле, любая последовательность $x(n\Delta t,u(n\Delta t))$ возрастает и ограничена сверху константой

$$\sup_{u\in U} x^E(u),$$

поэтому имеет предел, следовательно, существует и предел

$$\lim_{t\to\infty} x(t,\ u(t))=x^E.$$

Осталось только показать, что $x^E=x^E(u)$. Но $x^E=x^E(\tilde{u})$, поскольку при $x^E<x^E(\tilde{u})$ продолжалось бы движение в силу $f(x^E,\ u)>0.$ Если бы $\tilde{u}\neq u,$ то получилось бы, что $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)=\tilde{u},$ но $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)=u,$ поэтому $\tilde{u}=u.$

Итак, $\lim\limits_{t\to\infty} x\left[t,\ u(t)\right]=x^E(u),$ если $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)=u.$ ■

Рассмотрим теперь оптимальное управляющее правило $u^*(t)$ как одно из допустимых. Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_i^*(t) = 0$, то максимальное значение гамильтониана **(П.4.6)** определяется при больших t путем решения задачи на максимум $f_0(x,u)$. При этом согласно доказанным выше утверждениям оптимальная траектория как одна из допустимых удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} x\left[t, u^*(t)\right] = x^E(\tilde{u}),$$

где $\tilde{u} = \lim\limits_{t\to\infty} u^*(t)$.

Но $\tilde{u}$ должна доставлять максимум $f_0(x,\ u)$ при $f(x,u) = 0$, поэтому $\tilde{u} = u^*$.

Итак, если $f_0(x,u)$ имеет ограниченные производные по x, а матрица первых производных функций, задающих нелинейные ограничения статической задачи, является устойчивой в каждой точке допустимой области, то при больших значениях *t значение управления динамической задачи* с дисконтированным критерием оптимальности *совпадает со значением управления статической нелинейной задачи.*

В частности, если оптимальное правило имеет конечное число переключений, то с момента последнего переключения значение оптимального управления динамической задачи становится равным значению оптимального управления статической задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. *Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управляемых систем. – М.: Физматгиз, 1969.
3. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997.
4. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. – М.: Мир, 1999.
5. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
6. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: Учебник. – 2-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
7. *Колемаев В.А., Малыхин В.И.* и др. Математические методы принятия решений в экономике: Учебник. – М.: Финстатинформ, 1999.
8. *Крутов В.И.* и др. Основы теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1984.
9. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
10. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996.
11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 7-е изд. – М.: Физматгиз, 1987.
12. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимального управления. – М.: Наука, 1976.
13. *Самуэльсон П.* Экономика. – М.: Прогресс, 1992.
14. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. – М.: Статистика, 1974.
15. *Тарасевич Л.С., Гальперин В.М., Гребенников П.И., Леусский А.И.* Макроэкономика: Учебник. – СПб.: Изд-во СПб. гос. ун-та экономики и финансов, 1992.
16. *Харрис Л.* Денежная теория. – М.: Прогресс, 1990.
17. *Эртли-Каякоб П.* Экономическая кибернетика на практике. – М.: Экономика, 1983.
18. *Эшби У.Р.* Системы и информация. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1964.

Дополнительная литература

К главе 1

1. *Колемаев В.А.* Математические модели макроэкономической динамики. – М.: ГАУ, 1996.
2. *Колемаев В.А.* Математические модели макроэкономики. – М.: ГАУ, 1994.

К главе 2

1. *Колемаев В.А.* Трехсекторная модель экономики // Сборник трудов Международной академии информатизации. Секция АПК. – М.: КОПИЯ-ПРИНТ, 1997. – С. 335–345.
2. *Колемаев В.А.* Моделирование сбалансированного экономического роста // Вестник университета. – № 3. – М.: ГУУ, 2000. – С. 41–48.

К главе 3

1. *Колемаев В.А.* Трехсекторная модель экономики // Сборник трудов Международной академии информатизации. Секция АПК. – М.: КОПИЯ-ПРИНТ, 1997. – С. 335–345.

К главе 4

1. *Колемаев В.А.* Условия возникновения и самоподдержания инфляции // Сборник трудов Международной академии информатизации. Секция АПК. – М.: КОПИЯ-ПРИНТ, 1998. – С. 45–57.
2. *Колемаев В.А.* Моделирование инфляции и налогообложения с помощью трехсекторной модели экономики // Вестник университета. – № 1. – М.: ГУУ, 1999. – С. 52–66.

К главе 5

1. *Колемаев В.А.* Моделирование инфляции и налогообложения с помощью трехсекторной модели экономики // Вестник университета. – № 1. – М.: ГУУ, 1999. – С. 52–66.

К главе 6

1. *Колемаев В.А., Галкин А.* Сотрудничество и конкуренция в трехсекторной экономике // Вестник университета (серия ИИСУ). – № 4. – М.: ГУУ, 2003.

К главе 7

1. *Колемаев В.А., Белова Е.Ю.* Моделирование внешней торговли страны с сырьевой направленностью экономики // Сборник трудов Международной академии наук высшей школы. – Вып. 5. – 1999.
2. *Колемаев В.А., Белова Е.Ю.* Исследование условий целесообразности вхождения национальной экономики в мировой рынок // Вестник университета (серия ИИСУ) – № 1. – М.: ГУУ, 2000. – С. 37–52.
3. *Колемаев В.А.* Детерминанты внешней торговли // Вестник университета (серия ИИСУ) – № 1. – М.: ГУУ, 2000. – С. 53–64.
4. *Колемаев В.А.* Влияние внешней торговли на национальную экономику // Сборник трудов Международной академии наук высшей школы. – Вып. 6. – 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебник

Колемаев Владимир Алексеевич

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Редактор *Т.А. Балашова*
Корректор *Г.Б. Костромцова*
Оригинал-макет *Н.Г. Шейко*
Оформление художника *В.А. Лебедева*

Лицензия серии ИД № 03562 от 19.12.2000 г.
Подписано в печать 26.08.05. Изд. № 808
Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 13,0
Тираж 15 000 экз. (1-й завод — 3 000). Заказ 4640

ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА»
Генеральный директор *В.Н. Закаидзе*

123298, Москва, ул. Ирины Левчеико, 1
Тел.: 8-499-740-60-15. Тел./факс: 8-499-740-60-14
www.unity-dana.ru E-mail: unity@unity-dana.ru

Отпечатаио во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

Владимир Алексеевич
Колемаев

доктор экономических наук, профессор, действительный член Международной академии наук высшей школы, создатель научной школы трехсекторной экономики.

Основное направление исследований — математическое моделирование экономики на макроуровне. С помощью трехсекторной модели экономики исследовал влияние инфляции, внешней торговли, налоговой и структурной политики на производство и потребление. Результаты исследований вошли в настоящую книгу.

С 1988 г. заведует кафедрой прикладной математики Государственного университета управления. Подготовил 22 доктора и кандидата экономических наук, опубликовал свыше 100 научных и учебных работ, в том числе учебники:

- *Теория вероятностей и математическая статистика (1997)*
- *Математические методы принятия решений в экономике (1999)*
- *Математическая экономика (2002)*
- *Эконометрика (2004)*

ЮНИТИ
UNITY
www.unity-dana.ru

ISBN 5-238-00969-0
9 785238 009698 >